

INTERPOLÁCIA

Polynóm $P_n(x)$ je interpoláčnym polynómom množiny bodov $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ práve vtedy, ak pre jeho hodnoty v uzloch interpolácie platí $P_n(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Stupeň n interpolačného polynómu $P_n(x)$ je menší nanajvýš rovný $k - 1$.

Príklad č. 1:

Na základe definície nájdite interpolačný polynóm, ktorého graf prechádza bodmi

i	1	2	3
x_i	-1	0	2
y_i	2	1	5

Riešenie:

Máme dané tri body, stupeň interpolačného polynómu bude najviac $n = 2$. Polynóm bude mať tvar $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Vo všetkých troch bodoch musí platiť $P_n(x_i) = y_i$:

$$i = 1: \quad a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 2$$

$$i = 2: \quad a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 1$$

$$i = 3: \quad a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = 5$$

$$\text{Solve}[\{a-b+c==2, c==1, 4a+2b+c==5\}, \{a, b, c\}]$$

Riešením systému rovníc je $(a, b, c) = (1, 0, 1)$. Interpoláčny polynóm je $P_2(x) = x^2 + 1$.

Newtonov interpolačný polynóm

Daná je množina bodov $\{[x_i, f(x_i)]\}_{i=1}^{n+1}$.

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

$$\text{kde } a_0 = f(x_1), \quad a_1 = \Delta f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad a_2 = \Delta^2 f(x_1) = \frac{\Delta f(x_2) - \Delta f(x_1)}{x_3 - x_1}, \dots$$

$$a_i = \Delta^i f(x_1) = \frac{\Delta^{i-1} f(x_2) - \Delta^{i-1} f(x_1)}{x_{i+1} - x_1}.$$

$\Delta^i f(x) = \Delta(\Delta^{i-1} f(x))$ je diferenciácia i -teho rádu funkcie f v číslach x .

Stupeň polynómu je n , počet bodov je $n+1$.

Príklad č. 2:

Cez množinu bodov $\{[-0,1; 4,5], [0; 4], [0,5; 7,2], [1,2; 10,4]\}$ preložte Newtonov interpolačný polynóm.

Riešenie:

Zostavíme tabuľku diferencií:

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
1	-0,1	4,5			
2	0	4	-5		
3	0,5	7,2	6,4	19	
4	1,2	10,4	4,57143	-1,52381	-15,7875

Dosadíme do vzorca pre $N_n(x)$. Množina obsahuje 4 body. Polynóm bude stupňa 3.

$$\begin{aligned} N_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= 4,5 + (-5)(x + 0,1) + 19(x + 0,1)(x - 0,5) - 15,7875(x + 0,1)(x - 0,5)(x - 1,2) \end{aligned}$$

a upravíme

$$N_3(x) = 4 - 2,31062x + 25,315x^2 - 15,7875x^3.$$

Mathematica má na nájdenie interpolačného polynómu k dispozícii príkaz:

InterpolatingPolynomial[M,x]/Expand

Výsledný interpolačný polynóm nezávisí od metódy, ktorou ho nájdeme. Je jednoznačne určený bodmi, ktorými prechádza jeho graf.

Príklad č. 3:

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm 3. stupňa tak, aby ste čo najpresnejšie určili hodnotu funkcie danej tabuľkou pre $x = 4,3$.

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5
$f(x)$	0	2,3	4,2	2,7	3,2	3,7	3,0	4,3	4,5	4,7	3,9	4,1

Riešenie:

Interpolácia

Aby sme čo najpresnejšie určili hodnotu $f(4,3)$ pomocou polynómu 3. stupňa, vyberieme 4 body z blízkeho okolia bodu $x = 4,3$.

2,5	3,5	4,5	5,5
2,3	4,2	2,7	3,2

Použijeme softvér *Mathematica*

```
M={{2.5, 2.3}, {3.5, 4.2}, {4.5, 2.7}, {5.5, 3.2}}
{{2.5, 2.3}, {3.5, 4.2}, {4.5, 2.7}, {5.5, 3.2}}
```

```
P3[x_]=InterpolatingPolynomial[M, x]//Expand
```

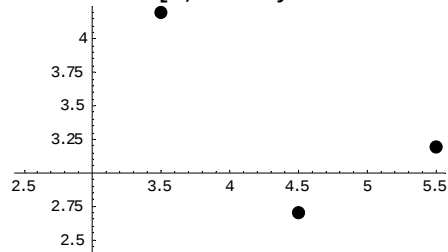
```
-52.7625 + 44.275 x - 11.15 x^2 + 0.9 x^3
```

```
P3[4.3]
```

```
3.0128
```

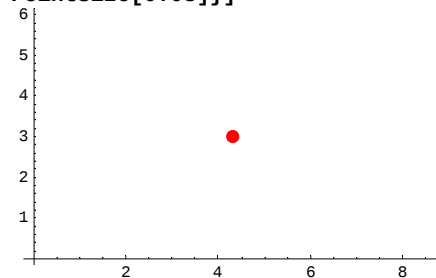
Nakreslíme grafy:

```
GM=ListPlot[M, PlotStyle->PointSize[0.03]]
```



```
-Graphics-
```

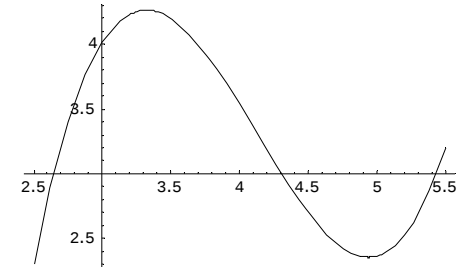
```
GB=ListPlot[{{4.3, P3[4.3]}}, PlotStyle->{RGBColor[1, 0, 0],  
PointSize[0.03]]]
```



```
-Graphics-
```

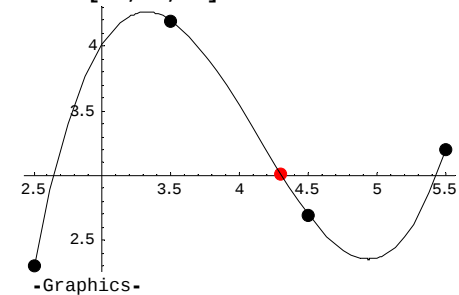
```
GP=Plot[P3[x], {x, 2.5, 5.5}]
```

Interpolácia



```
-Graphics-
```

```
Show[GM, GB, GP]
```



```
-Graphics-
```

Poznámka: V spoločnom obrázku porovnajte graf $P3(x)$, $x \in \langle 1, 5 \rangle$ s grafom, ktorý obsahuje všetky dátové body. Vytvorte interpolačný polynóm nad všetkými dátovými bodmi. Interpolácie porovnajte.

Príklad č. 4:

Vytvorte množinu bodov $\{[x, e^x]\}$ pre $x \in \langle 0; 3 \rangle$ s krokom 0,5. Týmto bodmi preložte interpolačný polynóm. Nájdite chybu interpolácie v čísle $x = 2.3$.

Graf funkcie e^x a interpolačného polynómu nakreslite na intervale $\langle -3; 6 \rangle$. Porovnajte situáciu v interpolačnom intervale a mimo neho.

Riešenie:

Množina bodov :

```
M=Table[{x, Exp[x]}, {x, 0, 3, 0.5}]    =>  {{0, 1}, {0.5, 1.64872}, {1., 2.71828},  
{1.5, 4.48169}, {2., 7.38906}, {2.5, 12.1825}, {3., 20.0855}}
```

Interpolácia

Interpoláčny polynóm:

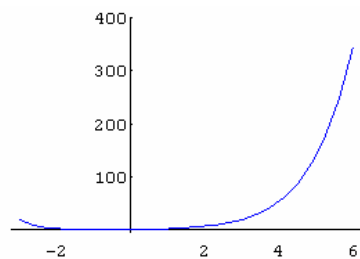
$$P[x] = \text{InterpolatingPolynomial}[M, x] // \text{Expand} \Rightarrow \\ 1 + 0.991168 x + 0.542326 x^2 + 0.0915477 x^3 + 0.105665 x^4 - 0.0190508 x^5 + 0.00662516 x^6$$

Chyba interpolácie v čísle 2.3:

$$\Delta = |\text{Exp}[2.3] - P[2.3]| \Rightarrow 0.00018713$$

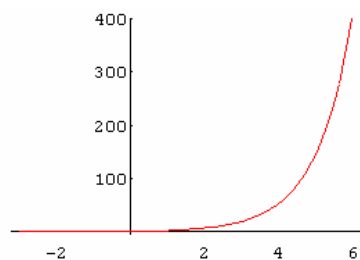
Graf interpolačného polynómu (modrý):

```
GP=Plot[P[x],{x,-3,6},PlotRange->All,PlotStyle->RGBColor[0,0,1]]
```



Graf funkcie (červený):

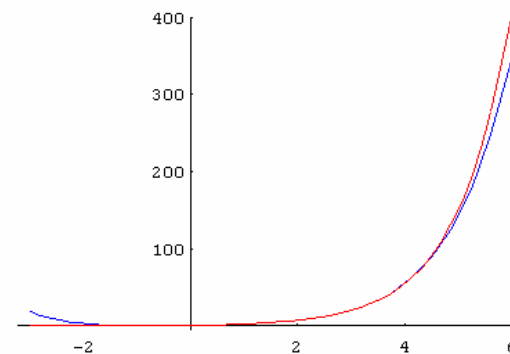
```
GF=Plot[Exp[x],{x,-3,6},PlotRange->All,PlotStyle->RGBColor[1,0,0]]
```



Obidva grafy v jednom obrázku (zväčšené):

```
Show[GP,GF]
```

Interpolácia



Všimnite si, že mimo intervalu $\langle 0, 3 \rangle$ sa grafy od seba vzdľalujú.