

Aproximácia metódou najmenších štvorcov (MNŠ)

Polynóm $P_n(x)$ je aproximačným polynómom množiny bodov $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ v zmysle MNŠ práve vtedy, ak hodnota

$$S = \sum_{i=1}^k (P_n(x_i) - y_i)^2$$

je minimálna. Stupeň n polynómu $P_n(x)$ je menší ako počet bodov k .

Absolútna chyba aproximácie v čísle x_i je $\Delta_i = |y_i - P_n(x_i)|$. Celkovú chybu aproximácie vypočítame zo vzťahu

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (P_n(x_i) - y_i)^2}.$$

Príklad č. 1: RUČNÉ POČÍTANIE

Dané sú tri body grafu funkcie $y = f(x)$

I	1	2	3
x_i	2	3	4
$y_i = f(x_i)$	-1,1	0,1	3,2

Nájdite polynóm prvého stupňa, ktorý najlepšie aproximuje funkciu $f(x)$, vypočítajte absolútnu chybu aproximácie v čísle $x = 3$ a celkovú chybu aproximácie.

Riešenie:

Polynóm budeme hľadať podľa definície. Bude mať tvar $P_1(x) = ax + b$. Súčet štvorcov odchýliek jeho hodnôt od hodnôt funkcie v tabuľke, bude

$$S(a, b) = (a \cdot 2 + b - (-1,1))^2 + (a \cdot 3 + b - 0,1)^2 + (a \cdot 4 + b - 3,2)^2,$$

čo je funkcia dvoch premenných a, b . Táto nadobudne minimálnu hodnotu v bode, kde sa jej parciálne derivácie rovnajú nule.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2(2a + b - 3,2) \cdot 2 + 2(3a + b - 0,1) \cdot 3 + 2(4a + b - 3,2) \cdot 4 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2(2a + b + 1,1) + 2(3a + b - 0,1) + 2(4a + b - 3,2) = 0$$

Z toho úpravou dostaneme systém normálnych rovníc

$$-21,8 + 58a + 18b = 0$$

$$-4,4 + 18a + 6b = 0$$

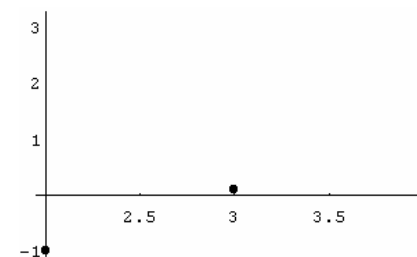
Jeho riešením sú čísla $a = 2,15$ a $b = -5,71667$. Hľadaný polynóm bude

$$P_1(x) = 2,15x - 5,71667.$$

Výsledok graficky znázorníme.

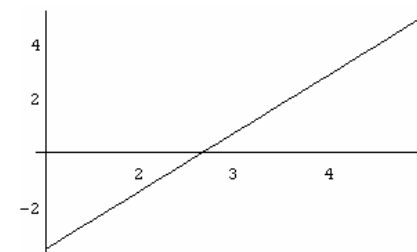
Najprv zadané body:

`G1=ListPlot[{{2,-1},{3,0.1},{4,3.2}},PlotStyle->PointSize[0.05]]`



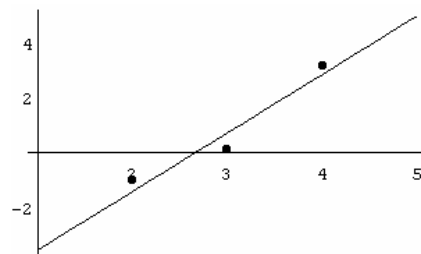
Potom priamku, ktorá je grafom nájdeného aproximačného polynómu:

`G2=Plot[2.15x-5.716,{x,1,5}]`



A nakoniec obidva obrázky spojíme do jedného:

`Show[G1,G2]`



Graf aproximačného polynómu (na rozdiel od interpolačného polynómu) neprechádza zadanými bodmi. Len v prípade, keď počet k bodov s rôznymi x -ovými súradnicami je o jednu väčší ako stupeň polynómu n , t.j. $k-1 = n$, vtedy aproximačný polynóm je totožný s interpolačným (interpolačia je špeciálnym prípadom aproximácie).

Teraz vypočítame chyby:

Absolútna chyba v čísle $x = 3$ bude $|f(3) - P_1(3)| = |0,1 - (2,15 \cdot 3 - 5,716)| = 0,634$.

Celková chyba aproximácie $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{3}(0,316^2 + 0,634^2 + 0,316^2)} = 0,4478$.

Príklad č. 2: POČÍTANIE POMOCOU MATHEMATICA

Nájdite rovnicu paraboly, ktorá najlepšie aproximuje množinu bodov M ,

$$M = \{ [0; 40], [10; 37,4], [20; 30,1], [30; 17,4] \}.$$

Vypočítajte absolútne chyby aproximácie v jednotlivých bodoch a celkovú chybu aproximácie.

Riešenie:

Pri riešení využijeme programový softvér *Mathematica*. Vložíme zadané dáta.

```
Clear[S, P, X, Y]
X = {0, 10, 20, 30}
Y = {40, 37.4, 30.1, 17.4}
n = Length[X]
{0, 10, 20, 30}
{40, 37.4, 30.1, 17.4}
4
```

Polynóm budeme hľadať podľa definície. Bude mať tvar $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Súčet štvorcov odchýliek jeho hodnôt od hodnôt funkcie v tabuľke, bude

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^4 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2,$$

$$S[a_, b_, c_] = \text{Sum}[(a * X[[i]]^2 + b * X[[i]] + c - Y[[i]])^2, \{i, 1, n\}] // \text{Expand}$$

$$4207.53 - 62880. a + 980000 a^2 - 2996. b + 72000 a b + 1400 b^2 - 249.8 c + 2800 a c + 120 b c + 4 c^2$$

alebo

$$S[a_, b_, c_] = \text{Apply}[\text{Plus}, (a * X^2 + b * X + c - Y)^2] // \text{Expand}$$

$$4207.53 - 62880. a + 980000 a^2 - 2996. b + 72000 a b + 1400 b^2 - 249.8 c + 2800 a c + 120 b c + 4 c^2$$

čo je funkcia troch premenných a, b, c . Táto nadobudne minimálnu hodnotu v bode, kde sa jej parciálne derivácie rovnajú nule.

$$\begin{aligned} r1 &= D[S[a, b, c], a] == 0 // \text{Expand} \\ &-62880. + 1960000 a + 72000 b + 2800 c == 0 \\ r2 &= D[S[a, b, c], b] == 0 // \text{Expand} \\ &-2996. + 72000 a + 2800 b + 120 c == 0 \\ r3 &= D[S[a, b, c], c] == 0 // \text{Expand} \\ &-249.8 + 2800 a + 120 b + 8 c == 0 \end{aligned}$$

Riešime systém **normálnych rovníc** – systém troch lineárnych rovníc o troch neznámych:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 1960000a + 72000b + 2800c - 62880 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 72000a + 2800b + 120c - 2996 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 2800a + 120b + 8c - 249,8 = 0$$

Riešením sú koeficienty a, b, c :

$$\mathbf{R} = \text{Solve}[\{\mathbf{r1}, \mathbf{r2}, \mathbf{r3}\}, \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}]$$

$$\{\{a \rightarrow -0.02525, b \rightarrow 0.0065, c \rightarrow 39.965\}\}$$

Aproximačný polynóm má tvar $P_2(x) = -0,02525 x^2 + 0,0065 x + 39,965$. Hľadaná rovnica paraboly bude $y = -0,02525 x^2 + 0,0065 x + 39,965$.

Tento výsledok môžeme dostať priamo pomocou príkazu **Fit**, ktorý má tvar

Fit [množina bodov, množina aproximačných funkcií, premenná].

$$P[x_] = \text{Fit}[M, \{1, x, x^2\}, x] \Rightarrow 39.965 + 0.0065 x - 0.02525 x^2$$

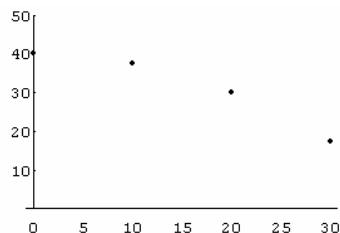
Množinu bodov M vytvoríme pomocou príkazu **Table**:

$$M = \text{Table}[\{X[[i]], Y[[i]]\}, \{i, 1, n\}]$$

Výsledok graficky znázorníme.

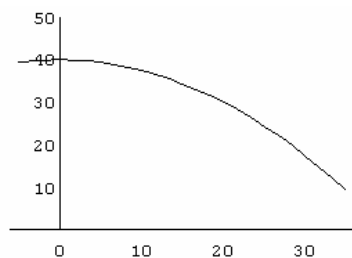
Zobrazíme graf bodov:

body=ListPlot[M,PlotStyle->PointSize[0.03],PlotRange->{0,50}]



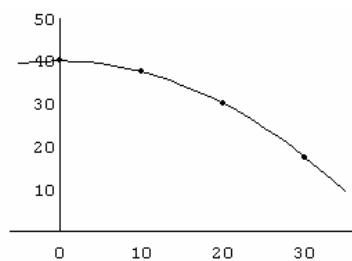
graf polynómu:

graf=Plot[P[x],{x,-5,35},PlotRange->{0,50}]



a obidva grafy spojíme do spoločného grafu:

Show[body,graf]



Vidíme, že body takmer ležia na parabole. Vypočítame hodnoty aproximačného polynómu v jednotlivých bodoch.

$$P[0] \Rightarrow 39.460 \quad P[10] \Rightarrow 37.505$$

$$P[20] \Rightarrow 29.995 \quad P[30] \Rightarrow 17.435$$

Z toho absolútne chyby aproximácie

$$|y_1 - P_2(x_1)| = |40 - 39,965| = 0,035, \quad y_2 - P_2(x_2) = |37,4 - 37,505| = 0,105,$$

$$|y_3 - P_2(x_3)| = |30,1 - 29,995| = 0,105, \quad y_4 - P_2(x_4) = |17,4 - 17,435| = 0,035.$$

Všetky sú rôzne od nuly. Polynóm $P(x)$ danými bodmi neprechádza.

$$\text{Celková chyba aproximácie } \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{4}(0,035^2 + 0,105^2 + 0,105^2 + 0,035^2)} = 0,0782624.$$

Príklad č. 3:

Aproximacia funkciou $f(x) = c \cdot e^{Ax}$

Množinu bodov

i	1	2	3
x_i	0,5	1	1,5
y_i	2,800	2,610	2,437

aproximujte funkciou $y = f(x) = c \cdot e^{Ax}$.

Riešenie:

Keďže ide o aproximáciu exponenciálnou funkciou, budeme úlohu najprv linearizovať.

Potom aproximujeme transformovanú množinu bodov priamkou a urobíme spätnú transformáciu.

a) Transformácia za účelom linearizácie:

$$y = c \cdot e^{Ax} \quad \text{Transformácia:} \quad Y = \ln y$$

$$\ln y = \ln c + Ax \quad B = \ln c$$

b) Aproximácia:

Na aproximáciu použijeme transformovanú množinu bodov

Mtrans:

i	1	2	3
x_i	0,5	1	1,5
$\ln y_i$	1,02962	0,95935	0,890768

a využijeme príkaz softvéru Mathematica Fit:

Nájdeme polynóm $P_1(x)$:

$$P1[x_]=Fit[{{0.5,1.02962}, {1,0.95935}, {1.5,0.890768}}, \{1,x\}, x]$$

$$\Rightarrow 1.09876 - 0.138852 x$$

c) Spätná transformácia:

Hľadaná funkcia

$$f[x] = E^{P1[x]} \Rightarrow E^{1.09876 - 0.138852 x}$$

čiže $f(x) = e^{1.09876 - 0.138852 x} = 3,00044 \cdot e^{-0.138852 x}$.

Príklad č. 4:

Aproximacia funkciou $f(x) = A \ln x + B$

Množinu bodov M

x_i	0,5	2,4	4,3	6,2	8,1	10
y_i	-0,688147	0,899469	1,50162	1,88655	2,17286	2,40259

aproximujte funkciou $f(x) = A \ln x + B$. Vypočítajte celkovú chybu aproximácie.

a) Transformácia za účelom linearizácie:

$$\begin{aligned} f(x) &= A \ln x + B & \text{Transformácia:} & \quad X = \ln x \\ Y &= A X + B & & \quad Y = y \end{aligned}$$

b) aproximácia:

Na aproximáciu použijeme transformovanú množinu bodov

Mtrans:

$\ln x_i$	$\ln 0,5$	$\ln 2,4$	$\ln 4,3$	$\ln 6,2$	$\ln 8,1$	$\ln 10$
y_i	-0,688147	0,899469	1,50162	1,88655	2,17286	2,40259

a využijeme príkaz softvéru Mathematica Fit:

Nájdeme polynóm $P_1(x)$:

$$\begin{aligned} P1[x] &= \text{Fit}[Mtrans, \{1, x\}, x] \\ &\Rightarrow 0.0136531 + 1.02965 x \end{aligned}$$

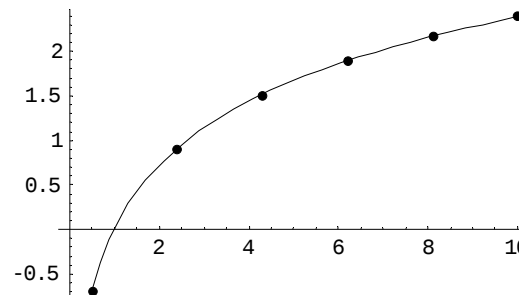
c) Spätná transformácia:

Hľadaná funkcia má tvar $f(x) = A \ln x + B$. $A = 1.02965$, $B = 0.0136531$

$$f[x] = A * \text{Log}[x] + B \Rightarrow 0.0136531 + 1.02965 \text{Log}[x]$$

čiže $f(x) = 1,02965 \ln x + 0,0136531$

Graf bodov a funkcie $f(x)$:



Celková chyba aproximácie:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (f(x_i) - y_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (f(x_i) - y_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} 0.000966638} = 0.0126928$$

Príklad č. 5:

Aproximacia funkciou $f(x) = \frac{1}{(Ax + B)^2}$

Množinu bodov M

x_i	2,3	2,35	2,5	2,6	2,7	2,8
y_i	100	25	4	2,04	1,24	0,83

aproximujte funkciou $f(x) = \frac{1}{(Ax + B)^2}$. Vypočítajte absolútnu chybu aproximácie pre $x = 2,5$.

Vypočítajte celkovú chybu aproximácie.

a) Transformácia za účelom linearizácie:

$$y = \frac{1}{(Ax + B)^2} \quad \text{Transformácia:} \quad X = x$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{Ax + B} \quad Y = y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} y^{-\frac{1}{2}} &= Ax + B \\ Y &= A X + B \end{aligned}$$

b) aproximácia:

Na aproximáciu použijeme transformovanú množinu bodov

Mtrans:

x_i	2,3	2,35	2,5	2,6	2,7	2,8
$y_i^{-\frac{1}{2}}$	0,1	0,2	0,5	0,70014	0,898027	1,09764

a využijeme príkaz softvéru Mathematica Fit:

Nájdeme polynóm $P_1(x)$:

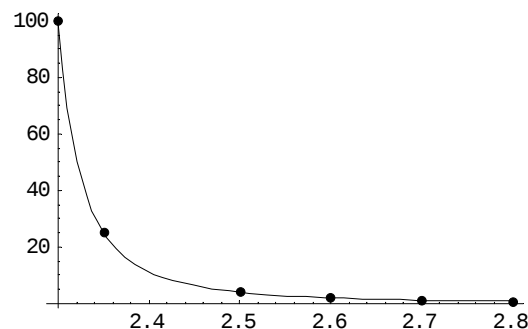
$$P1[x_] = \text{Fit}[Mtrans, \{1, x\}, x] \\ \Rightarrow -4.48861 + 1.99525 x$$

c) Spätná transformácia:

$$\text{Hľadaná funkcia má tvar } f(x) = \frac{1}{(Ax+B)^2} = \frac{1}{(P_1(x))^2} \\ f[x_] = P1[x]^{\wedge}2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(1,99525x + 4,48861)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{(1,99525x + 4,48861)^2}$$

Graf bodov a funkcie $f(x)$:



Absolútna chyba aproximácie pre $x = 2,5$:

$$|y_3 - f(x_3)| = |4 - 4.00802| = 0.0080178$$

Celková chyba aproximácie:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (f(x_i) - y_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (f(x_i) - y_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot 0.804123} = 0.366088$$

Príklad č. 6 :

Vytvorte množinu bodov $[x, \ln x]$ pre čísla $x \in \langle 0,5; 8,5 \rangle$ s krokom $h=1$. Touto množinou bodov preložte

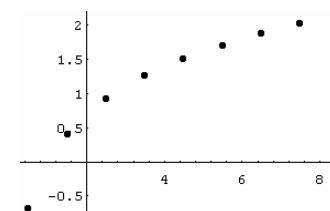
- interpolačný polynóm $P(x)$,
- aproximačný polynóm prvého stupňa $Q_1(x)$,
- aproximačný polynóm druhého stupňa $Q_2(x)$,
- aproximačný polynóm tretieho stupňa $Q_3(x)$.

Nakreslite množinu bodov a grafy jednotlivých polynómov. Spojte do jedného obrázku vždy graf s bodmi a vypočítajte príslušnú celkovú chybu aproximácie. Porovnajte presnosť aproximačných polynómov.

Riešenie:

Množina bodov

```
A=Table[{x,Log[x]},{x,0.5,8.5,1}]
=> {{0.5, -0.693147}, {1.5, 0.405465}, {2.5, 0.916291}, {3.5, 1.25276},
{4.5, 1.50408}, {5.5, 1.70475}, {6.5, 1.8718}, {7.5, 2.0149}, {8.5, 2.14007}}
Body=ListPlot[A,PlotStyle->PointSize[0.04]]
```

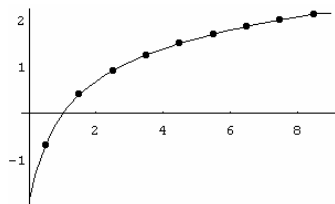


Interpolačný polynóm

```
P[x_]=InterpolatingPolynomial[A,x]//Expand
=> 1.87874 + 3.12861 x - 1.84096 x^2 + 0.74114 x^3 - 0.19302 x^4 + 0.0320668 x^5 -
0.00327591 x^6 + 0.000187261 x^7 - 4.57902 10^-6 x^8
```

```
Interpol=Plot[P[x],{x,0,9}]
```

```
Show[Body,Interpol]
```

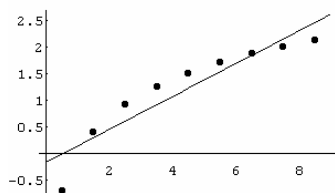


Aproximácia polynómom prvého stupňa

$Q1[x_]=\text{Fit}[A,\{1,x\},x]$
 $\Rightarrow -0.154094 + 0.308736 x$

$\text{Priamka}=\text{Plot}[Q1[x],\{x,0,9\}]$

$\text{Show}[\text{Body},\text{Priamka}]$



Chyba aproximácie

$\text{Sqrt}[\text{Sum}[(Q1[A[[i,1]]]-A[[i,2]])^2,\{i,1,\text{Length}[A]\}]/\text{Length}[A]]$
 $\Rightarrow 0.318793$

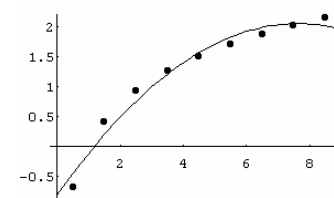
$\varepsilon_1 = 0.318793$

Aproximácia polynómom druhého stupňa

$Q2[x_]=\text{Fit}[A,\{1,x,x^2\},x]$
 $\Rightarrow -0.818673 + 0.749071 x - 0.0489261 x^2$

$\text{Parabola}=\text{Plot}[Q2[x],\{x,0,9\}]$

$\text{Show}[\text{Body},\text{Parabola}]$



Chyba aproximácie

$\text{Sqrt}[\text{Sum}[(Q2[A[[i,1]]]-A[[i,2]])^2,\{i,1,\text{Length}[A]\}]/\text{Length}[A]]$
 $\Rightarrow 0.14039$

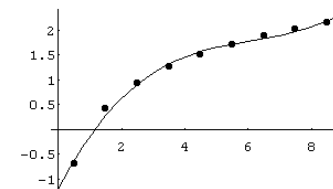
$\varepsilon_2 = 0.14039$

Aproximácia polynómom tretieho stupňa

$Q3[x_]=\text{Fit}[A,\{1,x,x^2,x^3\},x]$
 $\Rightarrow -1.19986 + 1.23978 x - 0.18426 x^2 + 0.0100248 x^3$

$\text{Kubicka}=\text{Plot}[Q3[x],\{x,0,9\}]$

$\text{Show}[\text{Body},\text{Kubicka}]$



Chyba aproximácie

$\text{Sqrt}[\text{Sum}[(Q3[A[[i,1]]]-A[[i,2]])^2,\{i,1,\text{Length}[A]\}]/\text{Length}[A]]$
 $\Rightarrow 0.0615703$

$\varepsilon_3 = 0.0615703$

Porovnanie:

Absolútna chyba aproximácie je pre polynóm tretieho stupňa najmenšia. Na aproximovanie funkcie danej bodmi $[x, \ln x]$ pre čísla $x \in \langle 0,5;8,5 \rangle$ s krokom $h=1$ je z vypočítaných aproximačných polynómov najvhodnejší.

Príklad č. 7: SAMOSTATNÁ PRÁCA

Množinu bodov M aproximujte pomocou linearizácie. Voľte vhodné funkcie $f(x)$.
Aproximácie porovnajte. Na základe grafov a celkovej chyby aproximácie vyberte najvhodnejšiu aproximačnú funkciu.

M:

x_i	2	2,28	2,56	2,84	3,2	3,4
y_i	0.11	25	0,29	0,58	2,78	25