

2 Úlohy na diskkrétne rozdelenie pravdepodobnosti

Úloha 1. Výberový priestor náhodného experimentu je $\{a, b, c, d, e, f\}$ a každý výsledok má rovnakú pravdepodobnosť. Náhodná premenná X je definovaná tabuľkou

výsledok	a	b	c	d	e	f
x	0	0	1,5	1,5	2	3

Určte jej

- pravdepodobnostnú funkciu
- distribučnú funkciu
- strednú hodnotu a rozptyl

a) $f(0) = 1/3, f(1,5) = 1/3, f(2) = 1/6, f(3) = 1/6.$

Úloha 2. Nech náhodná premenná X je daná tabuľkou

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1/8	2/8	2/8	2/8	1/8

Vypočítajte :

- $P(X \leq 2)$ (1);
- $P(X > -2)$ (7/8);
- $P(-1 \leq X \leq 1)$ (3/4);
- $P(X \leq -1 \text{ alebo } X = 2)$ (1/2);

Určte distribučnú funkciu pre X a vypočítajte:

- $P(X \leq 1,25)$ (7/8);
- $P(X \leq 2,2)$ (1);
- $P(-1,1 < X \leq 1)$ (3/4);
- $P(X > 0)$ (3/8);

Určte strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X
($E(X) = 0, D(X) = 1,5$)

Úloha 3. Náhodná premenná X je daná pravdepodobnostnou funkciou

$$f(x) = \frac{2x+1}{25}, x = 0,1,2,3,4.$$

a) Vypočítajte:

$$P(X = 4) \text{ (9/25); } P(X \leq 1) \text{ (4/25); } P(2 \leq X < 4) \text{ (12/25); } P(X > -10) \text{ (1);}$$

b) Určte distribučnú funkciu pre X a vypočítajte:

$$P(X < 1,5); P(X \leq 3); P(X > 2); P(1 < X \leq 2);$$

c) Určte strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X

Úloha 4. Marketingové odhady pravdepodobností, že nový nástroj pre analýzu vzoriek bude veľmi úspešný, stredne úspešný alebo neúspešný, boli pre uvedené tri klasifikácie nového produktu postupne 0,3 0,6 a 0,1. Ročnápridružená k uvedeným trom klasifikáciám výrobku je podľa vymenovania \$ 10 miliónov, \$ 5 miliónov a \$ 1 milión. Nech náhodná premenná X je ročná výroby.

a) Určte jej pravdepodobnostnú funkciu

$$(P(X = 10) = 0,3; P(X = 5) = 0,6; P(X = 1) = 0,1)$$

b) Určte distribučnú funkciu pre X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,1 & 1 \leq x < 5 \\ 0,7 & 5 \leq x < 10 \\ 1 & 10 \leq x \end{cases}$$

b) Určte strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X

$$(E(X) = 6,1; D(X) = 7,89)$$

Úloha 5. Optický skúšobný systém rozlišuje rôzne typy dielcov. Pravdepodobnosť správnej klasifikácie ľubovoľného dielca je 0,98. Predpokladajme, že tri dielce sa skúšajú a klasifikácie sú nezávislé. Nech náhodná premenná X je počet správne klasifikovaných dielcov.

- Určte jej pravdepodobnostnú funkciu
- Určte distribučnú funkciu náhodnej premennej X
- Určte strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X .

Úloha 6. V procese výroby polovodičov sa kontrolujú tri doštičky z dávky. Každá doštička je klasifikovaná ako „splňa“ alebo „nesplňa“. Nech pravdepodobnosť, že doštička splňa požiadavky kontroly je 0,8 a doštičky sú nezávislé

- Určte jej pravdepodobnostnú funkciu počtu doštičiek z dávky, ktoré splňajú požiadavky kontroly.
- Určte distribučnú funkciu náhodnej premennej z časti a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,008 & 0 \leq x < 1 \\ 0,104 & 1 \leq x < 2 \\ 0,488 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

- Určte strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej z časti a)
- $(E(X) = 2,4; D(X) = 0,48)$

Úloha 7. Distribútor strojov na cytogenics vyvinul nový model. Spoločnosť odhadla, že po zavedení stroja na trh stroj bude veľmi úspešný s pravdepodobnosťou 0,6, stredne úspešný s pravdepodobnosťou 0,3 a neúspešný s pravdepodobnosťou 0,1. Odhadnutý ročný zisk pripadajúci veľmi úspešnému modelu je \$ 15 miliónov, stredne úspešnému modelu \$5 miliónov, neúspešný model by priniesol stratu 500 000 dolárov. Nech X je ročný zisk nového modelu.

- Určte pravdepodobnostnú funkciu náhodnej premennej X .
- Určte distribučnú funkciu náhodnej premennej X .
- Určte strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X .

Úloha 8. Súprava sa skladá z troch mechanických komponentov. Predpokladajme, že pravdepodobnosti, že prvý, druhý a tretí komponent spĺňa požiadavky sú 0,95, 0,98 a 0,99. Predpokladajme, že komponenty sú nezávislé. Určte pravdepodobnostnú funkciu počtu komponentov v súprave, ktoré spĺňajú požiadavky.

Úloha 9. Chyby skúšobného kanála sa zisťujú pri kontrole prenosu overovacím zariadením, ktoré deteguje vynechané impulzy. Počet chýb zistených v osembitovom bajte je náhodná premenná s nasledovným rozdelením

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,7 & 1 \leq x < 4 \\ 0,9 & 4 \leq x < 7 \\ 1 & 7 \leq x \end{cases}$$

Určte nasledovné pravdepodobnosti:

- a) $P(x \leq 4)$ b) $P(x > 4)$ c) $P(x \leq 5)$ d) $P(X > 4)$ e) $P(X \leq 2)$

Úloha 10. Nech

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -10 \\ 0,25 & -10 \leq x < 30 \\ 0,75 & 30 \leq x < 50 \\ 1 & 50 \leq x \end{cases}$$

- a) $P(X \leq 50)$ (1); b) $P(X \leq 40)$ (0,75); c) $P(40 \leq X \leq 60)$ (0,25);
d) $P(X < 0)$ (0,25); e) $P(0 \leq X < 10)$ (0); f) $P(-10 < X < 10)$ (0);

Úloha 11. Hrúbka drevených obkladov (v palcoch), ktoré objednáva zákazník je náhodná premenná s distribučnou funkciou

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1/8 \\ 0,2 & 1/8 \leq x < 1/4 \\ 0,9 & 1/4 \leq x < 3/8 \\ 1 & 3/8 \leq x \end{cases}$$

Určte nasledovné pravdepodobnosti:

- a) $P(X \leq \frac{1}{18})$ b) $P(X \leq \frac{1}{4})$ c) $P(X \leq \frac{5}{16})$ d) $P(X > \frac{1}{4})$ e) $P(X \leq \frac{1}{2})$

2.1 Binomické rozdelenie

Úloha 12. Náhodná premenná X má binomické rozdelenie s parametrami $n=10$ a $p=0,5$. Určte nasledovné pravdepodobnosti

- a) $P(X = 5)$ (0,2461) b) $P(X \leq 2)$ (0,0547)
 c) $P(X \geq 9)$ (0,0107) d) $P(3 \leq X < 5)$ (0,3223)

X má binomické rozdelenie s parametrami $n=10$ a $p=0,5$. Určte nasledovné pravdepodobnosti

Úloha 13. Náhodná premenná X má binomické 12. Náhodná premenná X má binomické 12. Náhodná premenná X má binomické rozdelenie s parametrami $n=10$ a $p=0,01$.

Určte nasledovné pravdepodobnosti

- a) $P(X = 5)$ ($2,4 \cdot 10^{-8}$) b) $P(X \leq 2)$ (0,99989) c) $P(X \geq 9)$
 ($9,91 \cdot 10^{-18}$) d) $P(3 \leq X < 5)$ ($1,138 \cdot 10^{-4}$)

Úloha 14. Určte distribučnú funkciu binomickej náhodnej premennej X s parametrami

$$n = 3 \quad a \quad p = 0.25$$

Úloha 15. Nech X je počet bitov prijatých chybné v digitálnom komunikačnom kanále. Predpokladajme, že X je binomická náhodná premenná s parametrom $p = 0,001$. Ak je prenesených 1000 bitov, určte pravdepodobnosti :

- a) $P(X=1)$ (0,3681) b) $P(\geq 1)$ (0,6323) c) $P(X \leq 2)$ (0,9198)
 d) Nájdite strednú hodnotu a rozptyl X . ($E(X)=1$, $D(X)=0,999$)

Úloha 16. Dávky, ktoré obsahujú 50 zvinutých pružín z výrobného procesu sa kontrolujú, či sú zhodné s požiadavkami zákazníka. Stredná hodnota počtu nezhodných zvinutých pružín v dávke sa rovná 5. Predpokladajme, že počet nezhodných pružín v dávke, označený ako X , je binomická náhodná premenná.

- a) Aké je n a p ?
 b) Aká je $P(X \leq 2)$?
 c) Aká je $P(X \geq 49)$?

Úloha 17. Skúšobný test obsahuje 25 otázok, z ktorých každá obsahuje 4 odpovede, pričom iba jedna odpoveď je správna. Predpokladajme, že študent iba háda odpoveď na každú otázku.

- a) Aká je pravdepodobnosť, že študent odpovie správne na viac ako 20 otázok?
 b) Aká je pravdepodobnosť, že študent odpovie správne menej ako 5 otázok?

2.2 Hypergeometrické rozdelenie

Úloha 18. Nech X má hypergeometrické rozdelenie s parametrami $N = 100$, $n = 4$, $K = 20$. Určte:

- a) $P(X = 1)$ b) $P(X = 6)$ c) $P(X = 4)$ d) $E(X)$, $D(X)$.

Úloha 19. Nech X má hypergeometrické rozdelenie s parametrami $N = 20$, $n = 4$, $K = 4$. Určte:

- a) $P(X = 1)$ (0,4623) b) $P(X = 4)$ (0,0002)
 c) $P(X \leq 2)$ (0,9866) d) $E(X)$ (0,8), $D(X)$ (0,539).

Úloha 20. Nech X má hypergeometrické rozdelenie s parametrami $N = 10$, $n = 3$, $K = 4$. Určte:

- a) Pravdepodobnostnú funkciu a nakreslite ju

$$b) \text{ Distribučnú funkciu a nakreslite ju } (F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/6 & 0 \leq x < 1 \\ 2/3 & 1 \leq x < 2 \\ 29/30 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

Úloha 21. Dávka 75 pračiek obsahuje 5, ktorých variabilita hrúbky okolo obvodu pračky je nevyhovujúca. Výber pračiek sa vykonal náhodne bez opakovania.

- a) Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere nie je žiadna nevyhovujúca pračka?
 b) Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere je aspoň jedna nevyhovujúca pračka?
 c) Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere je presne jedna nevyhovujúca pračka?
 d) Aká je stredná hodnota nevyhovujúcich pračiek vo výbere?

Úloha 22. Spoločnosť zamestnáva 800 mužov pod 55 rokov. Predpokladajme, že 30% má markery na mužských chromozónoch, ktoré naznačujú zvýšené riziko vysokého krvného tlaku.

- a) Ak 10 mužov spoločnosti je vyšetrovaných na markery v týchto chromozónoch, aká je pravdepodobnosť, že presne 1 muž má marker?
 b) Ak 10 mužov spoločnosti je vyšetrovaných na markery v týchto chromozónoch, aká je pravdepodobnosť, že viac ako 1 muž má marker?

Úloha 23. Plošné obvodové dosky prechádzajú funkčnou skúškou predtým ako sú osadené polovodičovými čipami. Dávka obsahuje 140 dosák, z nich vyberieme 20 bez opakovania funkčnú skúšku.

- a) Ak 20 dosák je chybných, aká je pravdepodobnosť, že aspoň jedna chybná je vo výbere?
 b) Ak 5 dosák je chybných, aká je pravdepodobnosť, že aspoň jedna chybná je vo výbere?

2.3 Poissonovo rozdelenie

Úloha 24. Nech X má Poissonovo rozdelenie so strednou hodnotou rovnou 4. Určte nasledovné pravdepodobnosti:

- a) $P(X = 0)$ (0,0183) b) $P(X \leq 2)$ (0,3281)
 c) $P(X = 4)$ (0,1954) d) $P(X = 8)$ (0,0298)

Úloha 25. Nech X má Poissonovo rozdelenie so strednou hodnotou

rovnou 0,4. Určte nasledovné pravdepodobnosti:

- a) $P(X = 0)$ b) $P(X \leq 2)$
- c) $P(X = 4)$ d) $P(X = 8)$

Úloha 26. Predpokladajme, že počet návštevníkov, ktorí navštívia banku za hodinu, je Poissonova náhodná premenná. Ďalej predpokladáme, že $P(X = 0) = 0,05$. Určte strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X . ($E(X) = 2,996$ $D(X) = 2,996$)

Úloha 27. Počet telefónnych hovorov, ktoré prijme telefónna ústredňa sa často modeluje pomocou Poissonovej náhodnej premennej. Predpokladajme, že v priemere je 10 hovorov za hodinu.

- a) Aká je pravdepodobnosť, že je presne 5 hovorov za hodinu?
- b) Aká je pravdepodobnosť, že sú 3 Alebo menej hovorov za hodinu?
- c) Aká je pravdepodobnosť, že je presne 15 hovorov za 2 hodiny?
- d) Aká je pravdepodobnosť, že je presne 5 hovorov za 30 minút?

Úloha 28. Počet kazov na rube látky vo výrobe textilu, má Poissonovo rozdelenie so strednou hodnotou rovnou 41 kazov na meter štvorcový.

- a) Aká je pravdepodobnosť, že dva kazy sú na 1 meter štvorcový látky? (0,0045)
- b) Aká je pravdepodobnosť, že jeden kaz je na 10 metrov štvorcových látky? (0,3679)
- c) Aká je pravdepodobnosť, že žiadny kaz nie je na 20 metrov štvorcových látky? (0,1353)
- d) Aká je pravdepodobnosť, že aspoň dva kazy sú na 10 metrov štvorcových látky? (0,2642)

Úloha 29. Počet trhlín na úseku medzištátnej diaľnice, ktorý je tak závažný, že vyžaduje opravu, má Poissonovo rozdelenie so strednou hodnotou rovnou 2 trhliny na 1 mílu.

- a) Aká je pravdepodobnosť, že nie je žiadna trhlina, ktorá vyžaduje opravu na 5 mílach diaľnice?
- b) Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jedna trhlina, vyžaduje opravu na 1/2 míle diaľnice? (0,6321)

koniec