

Calculus WIZ a The Mathematical Explorer

Ako si zadovážiť *Calculus WIZ* a *The Mathematical Explorer*

Obe aplikácie, *Calculus WIZ* aj *The Mathematical Explorer* sú samostatné softvérové produkty pre objavovanie matematických myšlienok z rôznych oblastí matematiky (detaily pozri dolu). Sú to komerčné produkty vytvorené firmou Wolfram Research, Inc. (<http://wolfram.com/>) a predávajú ich lokálny predajcovia všade na svete. Viac informácií o vašom lokálnom distribútorovi nájdete na stránke <http://store.wolfram.com/>. V súčasnosti sú k dispozícii verzie pre platformy Windows a Mac OS.

Inštalácia

Produkty sú distribuované na CD médiu v škatuli obsahujúcej aj brožúru s inštrukciami na inštaláciu. Oba produkty vyžadujú pre svoju plnú funkčnosť číslo licencie a platné heslo. Tieto údaje sú vytlačené na obálke média CD. Všeobecne sa dá povedať, že proces inštalácie je veľmi jednoduchý a Installation Wizard vás bude spoľahlivo sprevádzať počas celého tohto procesu.

Calculus WIZ

Calculus WIZ je nástroj, ktorý môže poskytnúť pomoc pri riešení väčšiny matematických problémov vyskytujúcich sa v klasických úvodných kurzoch matematickej analýzy funkcie jednej premennej, nazývaných Matematická analýza I, Diferenciálny a integrálny počet (Calculus). Problémy a úlohy s obsahom patriacim do spomínanej oblasti sa dajú riešiť jednoducho stlačením určenej klávesy na klávesnici počítača a vložením požadovanej informácie do danej šablóny. *Calculus WIZ* kombinuje riešenie úlohy (je schopný nájsť riešenie väčšiny učebnicových príkladov) s úvodným prehľadom základnej relevantnej matematickej teórie (napr. veta o strednej hodnote, konvergencia mocninového radu, atď.) a nejaké ďalšie informácie, ktoré poskytujú tradičné tlačené učebnice. *Calculus WIZ* je samostatný produkt založený na overenej technológii systému *Mathematica* (tiež od firmy Wolfram Research, Inc.). Jadro tohto systému, Mathematica 4 Kernel, sa používa ako výpočtový mechanizmus. Ako väčšina produktov firmy Wolfram aj tento produkt využíva špeciálne dokumenty - Mathematica Notebook hypertext umožňujúce kombinovať text, grafiku, a matematické výrazy - vzorce v ľahko ovládateľnom prostredí, ktoré je plne interaktívne a podporuje aj animácie. Matematický text sa dá vkladať priamo z klávesnice pomocou kombinácie klávesových skratiek alebo použitím paliet.

Obsah aplikácie *Calculus WIZ* je usporiadaný v kapitolách a sekciách, ktoré sú podobné ako v klasických učebniciach: Funkcie a grafy, Limity, Derivovanie, Veta o strednej hodnote, Kresba kriviek, Aplikácie diferenciálneho počtu, Integrovanie, Aplikácie integrálneho počtu, Transcendentné funkcie, Techniky integrovania, Parametrické a polárne rovnice, Nekonečné postupnosti, Nevlastné integrály, Nekonečné rady, Diferenciálne rovnice.

Kapitoly a sekcie sú ľahko dostupné z okna Help Browser a pomocou zabudovaných odkazov na jednotlivé časti obsahu *Calculus WIZ*. Aj keď *Calculus WIZ* obsahuje podrobný materiál o diferenciálnom počte funkcie jednej reálnej premennej, podobne ako ktorákoľvek učebnica, jeho hlavným zmyslom je poslúžiť ako pomocník pri generovaní zýadaní na domáce úlohy. Obsahuje predlohu pre učiteľov, umožňujúcu generovať domácu úlohu pre každého žiaka individuálne.

Obsah systému *Calculus WIZ* je triedený v menu Help Browser podľa názvu, kapitoly, sekcie, a podsekcie. Domáca úloha v aplikácii *Calculus WIZ* - notebook obsahuje príklady strednej náročnosti v porovnaní s úlohami v zbierkach príkladov. Sú riešené tromi rôznymi spôsobmi: pomocou automatickej funkcie *Calculus WIZ* solvers, metódami, aké sa používajú v bežných učebniciach, a stručne, pomocou programov *Calculus WIZ* template. Tieto tri spôsoby riešenia dávajú možnosť porovnať jednotlivé prístupy. V ďalšom texte je uvedený príklad z menu Help Browser. Vysvetlený je princíp výpočtu ako by sa vykonával ručne.

The screenshot shows the 'Calculus WIZ' application window with the 'Help Browser' pane open. The 'Go To' field is set to 'CalculusWiz 17.1.3'. The 'Table of Contents' pane on the left shows a tree structure with 'Calculus WIZ Text' selected. The main content area displays an example of a hand solution for the differential equation $\frac{dy}{dx} = e^y \cos[x]$.

Example: hand solution of $\frac{dy}{dx} = e^y \cos[x]$

First, the equation

$$\frac{dy}{dx} = e^y \cos[x]$$

is separable and may be written in differential form as

$$e^{-y} dy = \cos[x] dx.$$

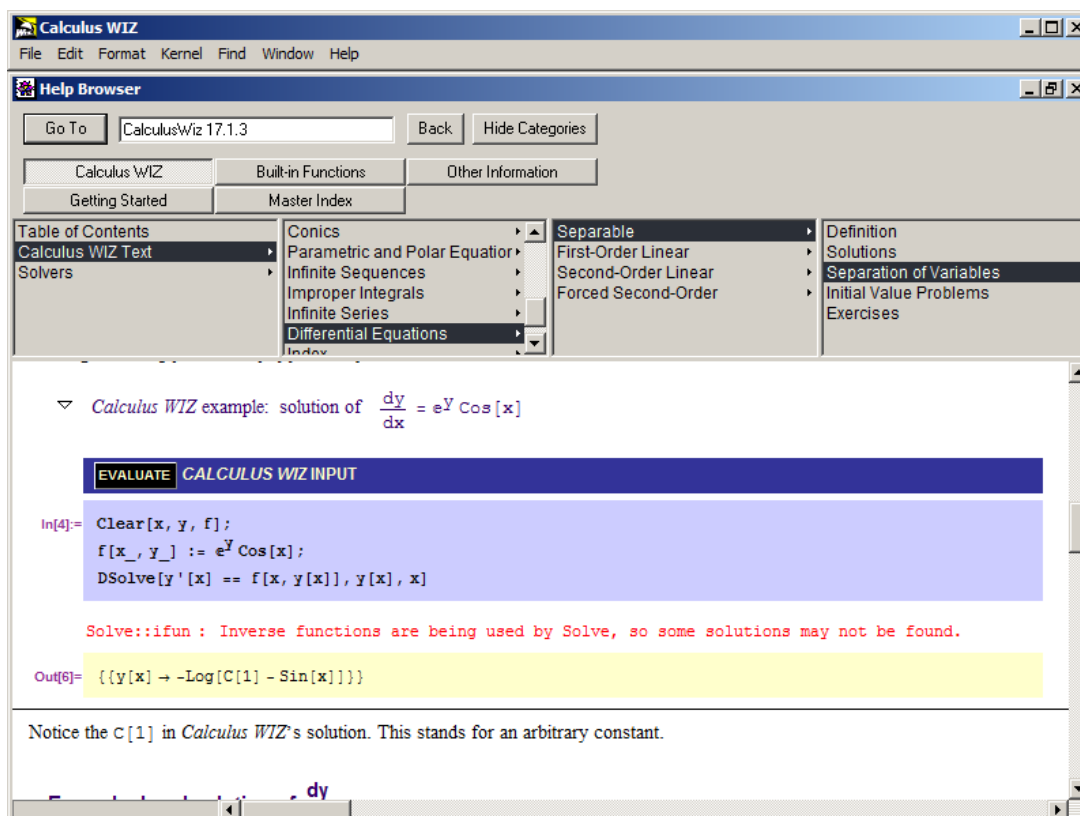
Second, the integrals are easy to compute.

$$\int e^{-y} dy = \int \cos[x] dx$$

$$-e^{-y} = \sin[x] - c, \text{ or}$$

$$e^{-y} = c - \sin[x], \text{ for a constant } c.$$

Ďalšia ukážka ilustruje, ako by sa ten istý problém riešil pomocou programu *Calculus WIZ* template:



The Mathematical Explorer

The Mathematical Explorer je elektronická kniha rozdelená na 15 kapitol: Prvočísla, Diferenciálny počet, Vzorce pre výpočet π , Štvorcové kolesá, Moc kontrolných čísl, Tajné kódy, Rekreačná matematika, Objavovanie Escherových obrazcov, Variety a Rosety, Turtle rozklad, Vzory a chaos, Fermatova posledná veta, Riemannova hypotéza, Nezvyčajné číselné systémy, a Problém štyroch farieb. Každá kapitola má niekoľko podkapitol. Pokrytých je omnoho viac matematických oblastí, než ako by a dalo očakávať podľa nadpisov kapitol. Čitateľ sa oboznámi s nekonečnými zlomkami, Diofantovými rovnicami, modulárnou aritmetikou, s problémom Buffonovej ihly, Fibonacciho číslami, dozvie sa o problémoch s krivkou brachistochronou, s krivkami vyplňajúcimi priestor, atď. Každá kapitola je obohatená poznámkami z histórie a krátkymi životopismi matematikov, ktorí prispeli ku riešeniu daného problému (vrátane Euklida, Fermata, Gaussa, Eulera, Newtona, Riemanna, Wilesa a mnohých ďalších). V okne Help Browser, v sekcii Ukážky - Demos, môže čitateľ nájsť množstvo zaujímavých príkladov symbolicko-numerických výpočtov, ako napr. tridsaťtri reprezentácií Catalanovej konštanty, riešenie Newtonovej rovnice pomocou radov, ai. Tieto ukážky nie sú priamou súčasťou knihy, ale sú doplnkovým materiálom pre spestrenie a pobavenie čitateľa.

The Mathematical Explorer je samostatný produkt na báze technológie systému *Mathematica* (jadro *Mathematica 4 Kernel* je použité ako výpočtový mechanizmus). Zamýšľaným primárnym užívateľským rozhraním pre elektronický text aplikácie *Mathematical Explorer's* je vstup cez Help Browser systému *Mathematica*. To čitateľovi umožňuje jednoduché vyberanie kapitol, sekcií a podsekcii ovládaním myši. Čitateľ môže vyhľadávať jednotlivé matematické pojmy, životopisy matematikov, odkazy, atď., a v ponuke má aj všetky materiály obsiahnuté v samotnom systéme *Mathematica*. Pre experimentovanie a objavovanie matematických vzorcov je čitateľ priamo navigovaný po ťuknutí na výraz v systéme *Mathematica* (alebo program), ktorý sa aktivuje pri súčasnom stlačení klávesov Shift a Enter. Výsledok môže byť skutočne pôsobivý — pred očami sa nám vytvárajú grafy a tabuľky, spracovávajú, upravujú a zjednodušujú sa často komplikované algebrické výrazy, v dôsledku čoho je možné zbaviť sa nezáživných dlhotrvajúcich a únavných výpočtov. Text je napísaný v ústretovom a priateľskom tóne. Čitateľ má k dispozícii množstvo príkladov na všetky zo zahrnutých tém.

Hlavný zámer pre vytvorenie *The Mathematical Explorer* je najlepšie vyjadrený v úvode do aplikácie:

"*The Mathematical Explorer* je interaktívna bádateľská objavná cesta cez najfascinujúcejšie problémy v histórii matematiky — problémy, ktoré zaujímali matematikov od dôb starovekého Grécka až podnes. Obsahuje témy dotýkajúce sa matematických otázok, ktoré boli zodpovedané iba v nedávnej minulosti, ako Fermatova posledná veta a počítačový dôkaz problému štyroch farieb, a približuje aj niektoré doteraz nevyriešené problémy ako Riemannova hypotéza.

"Spracovanie každej témy je vymyslené so zreteľom na vzdelávacie aj zábavné aspekty; text obsahuje zrozumiteľné vysvetlenie základných pojmov spolu s fascinujúcimi kultúrnymi a historickými detailami. Mnoho tém má silné výpočtové pozadie, zatiaľ čo iné sú najlepšie zrozumiteľné pomocou grafickej vizualizácie. V systéme *The Mathematical Explorer* je integrovaný výkonný výpočtový mechanizmus a priateľské užívateľské rozhranie, ktoré sú vytvorené na spoľahlivej technológii tvorcov systému *Mathematica*, čo je výpočtový softvér firmy Wolfram Research ocenený mnohými oceneniami. Pomocou *The Mathematical Explorer* môžete vykonávať mnoho rozličných numerických a symbolických výpočtov a vytvárať neobmedzené množstvo obrázkov, ktoré vám napomôžu lepšie pochopiť pojmy, ktoré skúmate.

"*The Mathematical Explorer* je zdroj vytvorený ako otvorená neukončená kniha, interaktívne okno do sveta modernej matematiky, ktoré vám umožňuje kráčať po stopách výpočtov veľkých matematických osobností a prežívať zázrak objavovania neznámeho, čo fascinuje a vždy fascinovalo rovnako amatérov ako aj profesionálov všetkých čias."

Príklady z kapitoly Prvočísla:

The screenshot shows the 'The Mathematical Explorer' application window. The 'Help Browser' pane is open, displaying a tree view of the content. The 'Prime Numbers' section is selected, and the 'Questions on Euclid's Proof' sub-section is expanded. The main content area displays the 'Prime Numbers' title, followed by the subtitle 'Questions Raised By Euclid's Proof'. Under this, 'Question 1' is highlighted. The text of Question 1 reads: 'After thinking about [Euclid's proof](#) that there are an infinite number of prime numbers, several questions, still unresolved today, immediately come to mind. The following question is easy to investigate.' Below this, a teal box contains the question: 'Question 1: How often is an integer of the form $1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \dots$ prime?'. The text continues: 'Numbers of the form $1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ are called **Euclid numbers**. The expression $\prod_{i=1}^n i$ is a mathematical notation used to represent the product of the integers 1 through n . So for example, the following gives the

Ukážka životopisu matematika:

The screenshot shows the 'The Mathematical Explorer' application window. The 'Help Browser' pane is open, displaying a tree view of the content. The 'Mathematicians' section is selected, and the 'Euclid' sub-section is expanded. The main content area displays the 'Mathematicians' title, followed by a portrait of Euclid and the text: 'Euclid of Alexandria (c.365 BC-c.300 BC)'. Below this, the text reads: 'Euclid, a Greek who lived in Alexandria (now in Egypt) about 300 BC, wrote a book called *The Elements*, which has outsold all other books on mathematics. In fact, *The Elements* consists of 13 books, and it covers just about all the mathematics known at that time. While it is not clear exactly which proofs in the book can be credited to Euclid himself, it is generally accepted that Euclid discovered the beautiful proof that there are infinitely many prime numbers. Moreover, the Euclidean algorithm, which plays a prominent role in Greek geometry and number theory, is perhaps

Stan Wagon, autor softvéru, hovorí "S každým ubehnutým rokom sa väčšia a väčšia časť matematiky stáva prirodzene experimentálnou, s mnohými hodinami výpočtov slúžiacimi na odhalenie nových vzťahov a vzorcov. Jedným z dôsledkov tohto výpočtového posunu v matematike je, že väčšia časť tejto vedeckej disciplíny, klasická aj moderná, sa stáva dostupnou pre tých, ktorí nemajú špeciálne matematické vzdelanie. Stalo sa tak vďaka tomu, že boli vytvorené natoľko sofistikované algoritmy a metódy vizualizácie, že oblasti, ktoré boli kedysi doménou iba úzkeho okruhu špecialistov, sú dnes otvorene prístupné celému svetu. The Mathematical Explorer je pokusom ukázať, ako môžu elementárne výpočty objasniť mnohé fascinujúce konštrukcie, od jednoducho zrozumiteľného problému štyroch farieb a Fermatovej poslednej vety, až po abstraktnejší a podstatnejší problém, akým je Riemannova hypotéza."

Iné vlastnosti Calculus WIZ a The Mathematical Explorer

Ako produkty na báze systému *Mathematica*, oba programy, *Calculus WIZ* a *The Mathematical Explorer* podporujú procedurálne, funkcionálne (LISP) programovacie štýly s používaním funkcií a klasické programovacie paradigmy. Z tohto dôvodu nie sú ich kapacity limitované preddefinovanými šablónami a dajú sa použiť tvorivým spôsobom, používatelia si môžu vytvárať svoje vlastné programy.

Jednoducho sa napr. dajú generovať tabuľky funkčných hodnôt:

Table[Sin[x], {x, 0, Pi, Pi/6}]

$\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$

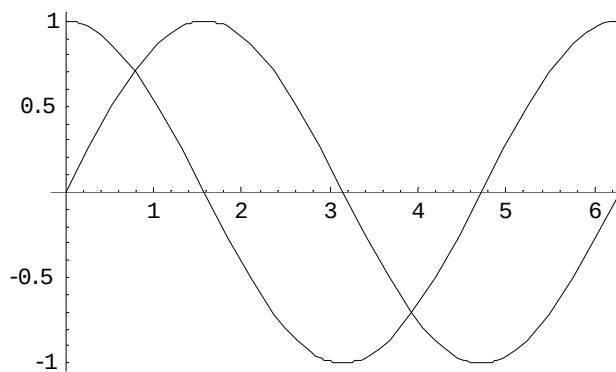
Využitím predností preddefinovaného štýlu vkladania a definovania funkcií môžeme vytvoriť krátke a elegantné programy. Vytvoríme tabuľku derivácií a integrálov danej skupiny funkcií:

({#, D[#, x], Integrate[#, x]} & /@ {Sin[x], Cos[x], Tan[x], Cot[x], ArcTan[x]}) // TableForm

Sin[x]	Cos[x]	-Cos[x]
Cos[x]	-Sin[x]	Sin[x]
Tan[x]	Sec[x] ²	-Log[Cos[x]]
Cot[x]	-Csc[x] ²	Log[Sin[x]]
ArcTan[x]	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \text{ ArcTan}[x] - \frac{1}{2} \text{ Log}[1+x^2]$

Veľmi jednoducho sa dajú tiež nakresliť grafy funkcií a ich zobrazenie v jednom obrázku:

Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, 0, 2 Pi}]



Programovateľné je aj dosadzovanie, napr. pri riešení rovníc.

Sin[x]^2+Cos[x]==1/2 /. Sin[x] -> Sqrt[1-Cos[x]^2]

$$1 + \text{Cos}[x] - \text{Cos}[x]^2 = \frac{1}{2}$$

Symbol % označuje výsledok predchádzajúceho výpočtu:

% /. Cos[x] -> z

$$1 + z - z^2 = \frac{1}{2}$$

Príkaz Solve vyrieši predchádzajúcu rovnicu, na ktorú sa odvolávame pomocou symbolu %:

Solve[%, z]

$$\left\{ \left\{ z \rightarrow \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}) \right\}, \left\{ z \rightarrow \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) \right\} \right\}$$

Výsledky môžeme ihneď použiť na spätné dosadenie:

Cos[x] == z /. %

$$\left\{ \text{Cos}[x] = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}), \text{Cos}[x] = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) \right\}$$

a môžeme vyriešiť prvú z daných goniometrických rovníc

Solve[%[[1]], x]

Solve::ifun Inverse functions are

being used by Solve, so some solutions

may not be found.

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\text{ArcCos} \left[\frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}) \right] \right\}, \left\{ x \rightarrow \text{ArcCos} \left[\frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}) \right] \right\} \right\}$$

Všimnite si, ako systém sám vygeneroval upozornenie, že funkcia nemá inverznú funkciu na danej oblasti. Pretože oba produkty, *Calculus WIZ* aj *The Mathematical Explorer* podporujú výpočty s presnými hodnotami, predchádzajúci výsledok nie je zapísaný ako číslo. Môžeme však požiadať o numerické riešenie:

N[%]

```
{x → -1.94553}, {x → 1.94553}
```

Záver

Oba produkty, *Calculus WIZ* a *The Mathematical Explorer* sú samostatné softvérové produkty na báze technológie systému *Mathematica*. Sú vhodné na objavovanie veľkých matematických myšlienok pomocou vytvorených šablón, ale aj na používanie prác vytvorených študentmi samostatným programovaním. Oba produkty podporujú vnútorný programovací jazyk systému *Mathematica* (s istými obmedzeniami). Oba produkty tiež podporujú mnoho príkazov systému *Mathematica*, napr. príkazy na úpravu výrazov, na symbolické/numerické integrovanie, atď. Nepodporujú príkazy systému *Mathematica* pre spracovanie veľkých dátových množín, pretože sa nepredpokladá, že by tieto príkazy používali študenti stredných škôl a prvých ročníkov univerzít. Je potrebné spomenúť, že existujú ešte aj iné niektoré iné, nepodstatné obmedzenia oproti plne funkčnej verzii systému *Mathematica*.

Calculus WIZ a *The Mathematical Explorer* sú oba odporúčané pre vyššie ročníky stredných škôl a/alebo pre učiteľov bakalárskych stupňov štúdia na univerzitách a vysokých odborných školách.