NIEKOĽKO MYŠLIENOK O POUŽITÍ PAS PRI VÝUČBE DIFERENCIÁLNEHO POČTU FUNKCIÍ VIAC PREMENNÝCH

1. Úvod

V priebehu ostatných 20 rokov sme v Španielsku pri výučbe matematiky v inžinierskom štúdiu zaznamenali nástup počítačových algebraických systémov (PAS). Vo všeobecnosti, žiaľ, tento jav nebol sprevádzaný nutnými zmenami vo vyučovacích metódach, ktoré by optimalizovali ich úžitok. Je bežné, že učitelia väčšinou ku tradičným vyučovacím postupom iba pridávajú relevantné inštrukcie pre prácu na počítači a riešia to isté, na čo stačí pero a papier. Tento postup vedie k preťaženiu, k mechanickému používaniu PAS, nie však ku skutočnému vyučovaniu matematiky. Zmysel PAS (t.j. ponúknuť matematický nástroj pre prácu a vyučovanie) je nahradený situáciou, kedy sa študenti stávajú odborníkmi v PAS bez toho, že by rozumeli matematickým problémom, ktorými sa zapodievajú.

Na druhej strane použitie PAS vo výučbe základného diferenciálneho počtu nájdeme oveľa častejšie ako vo výučbe diferenciálneho počtu viac premenných. Zámerom tejto kapitoly je demonštrovať oveľa integrovanejší harmonickejší spôsob použitia PAS (*Maple*, *Mathematica* a i.) v každodennej učiteľskej praxi na vysokých školách. Náš záujem zúžime na ukázanie možností použitia PAS práve pri výučbe diferenciálneho počtu funkcie viac premenných. Návrh je výsledkom našej práce v pozícii učiteľov matematiky na technických fakultách rôznych španielskych univerzít, kde sa používa *Mathematica* alebo *Maple*.

2. Východiská

Na technických vysokých školách sa diferenciálny počet funkcie viac premenných zvyčajne učí po absolvovaní jednosemestrálneho kurzu základov matematickej analýzy, diferenciálneho počtu funkcie jednej premennej. Bežnými témami v tomto predmete sú: základné pojmy v R^2 a R^3 , limity, smerové a parciálne derivácie, homogénne funkcie, derivácia zloženej funkcie, derivácia implicitnej funkcie, inverzná funkcia, Taylorov vzorec, maximum a minimum, Lagrangeov multiplikátor.

Na predmet býva vyčlenených cca 30 hodín priamej výučby (prednášky a cvičenia) a predpokladá sa, že približne taký istý čas sa bude študent venovať samostatnej príprave.

Očakávaným cieľom je, že študent bude primerane ovládať jednotlivé témy a dosiahne základnú zručnosť v manuálnom počítaní, aby mohol pokračovať v štúdiu nadväzujúcich matematických alebo inžinierskych predmetov. Okrem toho bude ovládať, kde a ako použiť PAS pri riešení matematického problému.

Napokon treba zdôrazniť, že študenti ovládajú základy práce s PAS, v ktorom budú pracovať (*Mathematica* alebo *Maple*, záleží na univerzite).

Vzhľadom na evidentný nedostatok času a vyššie zmienené ciele, je zrejmé, že táto situácia si vyžaduje nový metodologický prístup.

3. Výučbový materiál

V rámci metodologického návrhu sme pripravili pre štandardný kurz diferenciálneho počtu funkcie viac premenných nové výučbové materiály. Materiál konkrétne pozostáva z cvičebnice, ktorá systematicky obsahuje teoretické princípy, riešené a neriešené príklady (pozri García, A., López, A., Romero, S., Rodríguez, G., de la Villa, A., 2002) spolu s CD, na ktorom sa nachádzajú riešené príklady s pomocou PAS.

Nižšie uvádzame opis materiálu nachádzajúceho sa na CD, najmä častí, ktoré sa týkajú diferenciálneho počtu funkcie viac premenných spolu s vysvetlením stratégie podľa ktorej boli zostavené. Poznamenávame, že CD obsahuje dve alternatívne zložky s paralelným obsahom: jednu v *Maple* a druhú v *Mathematica*. Podľa toho, príklady, ktoré tu uvádzame môžu byť buď v jednom alebo druhom systéme.

Učebný materiál vyčerpávajúco pokrýva vyššie zmienené témy a dovoľuje učiteľovi diferencovaný prístup podľa konkrétnych požiadaviek. Učiteľ môže daný materiál použiť podľa vlastného uváženia buď ako učebný materiál pre hromadné cvičenie alebo ako pomôcku na samostatnú prácu študentov zohľadňujúc študentovu osobnosť a čas potrebný na zvládnutie jednotlivých tém.

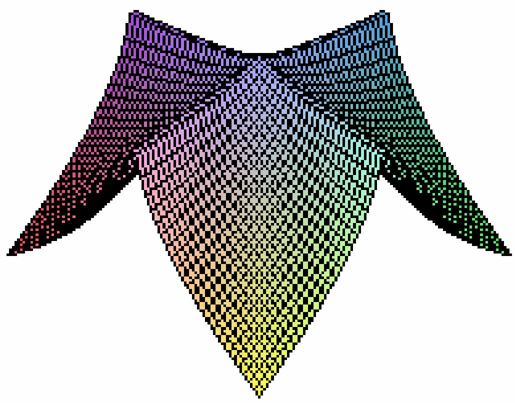
Tento výskum by mal (prinajmenšom v Španielsku) zmierniť nedostatok materiálov pre výučbu diferenciálneho počtu funkcie viac premenných v porovnaní s obrovským množstvom materiálov pre výučbu diferenciálneho počtu funkcie jednej premennej.

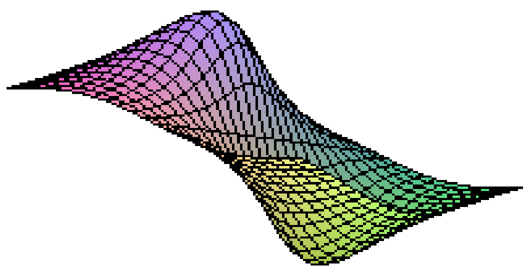
4. Metodologický návrh

Metodologický návrh zohľadňuje skladbu tradičného vyučovania - prednášky, cvičenia (uvádza rôzne teoretické princípy a klasické cvičenia "pri tabuli") a laboratórne cvičenia, v ktorých sa využíva príslušný PAS s cieľom posilniť teóriu a riešenie príkladov. Metodologický návrh venuje približne jednu tretinu celkového času riadenému používaniu PAS, sledujúc učiteľove inštrukcie a nasledovné faktory:

4.1. **Zlepšenie vizualizácie**

Možnosť ihneď načrtnúť si graf plochy poskytuje pri skúmaní funkcie dvoch premenných ďalšie informácie, odhad vlastností funkcie , extrémov, hraníc, atď. Nasledujúce obrázky, ktoré sme dostali pomocou základných príkazov *Maple*, pomáhajú porozumieť pojmom ako diferencovateľnosť, kedy funkcia nie je diferencovateľná a lokálne extrémy.





Grafické kapacity môže učiteľ využiť na demonštráciu rôznych matematických princípov. Treba však upozorniť, že dobrý grafický výstup si často vyžaduje veľa príkazov a učiteľ musí zohľadniť čas, ktorý si potom zobrazenie vyžaduje.

4.2. Experimentácia

Rýchla realizácia dlhých a únavných výpočtov dovoľuje pri riešení príkladov použiť nový postup - porovnať rôzne techniky riešenia: numerické, analytické a grafické.

Preto napríklad môžeme pomocou PAS veľmi ľahko odhaliť premenné, ktoré sa dajú vo vete o implicitne zadanej funkcii voliť ako závislé. Ak predpoklady vety sú splnené, stačí zistiť, či je determinant Jacobiho matice Jacobián nulový. Hoci systém implicitných funkcií je ťažký, problém sa redukuje iba na automatický výpočet.
Taktiež, v prípade, keď chceme získať prvotný názor na existenciu limity funkcie, stačí nakresliť graf funkcie alebo skonštruovať tabuľku hodnôt pre funkciu v okolí príslušného bodu. Napríklad pri skúmaní existencie limity funkcie $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ v začiatku súradnicovej sústavy, príkaz systému *Mathematica*

```
TableForm[Table[f[a + j h, b + k h], {j, 1, n}, {k, 1, n}]]
```

pre a=b=0, h=0.001, k=0.001, n=5 vygeneruje nasledovnú tabuľku:

0.5	0.4	0.3	0.235294	0.192308
0.4	0.5	0.461538	0.4	0.344828
0.3	0.461538	0.5	0.48	0.441176
0.235294	0.4	0.48	0.5	0.487805
0.192308	0.344828	0.441176	0.487805	0.5

Z hodnôt v tabuľke môžeme usúdiť, že limita funkcie v danom bode neexistuje. Dokážeme to tak, že nájdeme také dve podmnožiny, ktoré majú rozdielnu limitu, napríklad $y=x$ a $y=2x$.

Po pedagogickej stránke by študenti mali byť pri hľadaní riešenia povzbudzovaní k experimentovaniu. Keďže mechanický výpočet vykoná počítač, je veľmi dôležité vyhnúť sa lenivosti a vykonať viacero rozličných pokusov.

4.3. Oprostenie od mechanickej práce

Nemali by sme prehliadnuť, že študenti majú nadobudnúť základné zručnosti aj v ručnom počítaní. PAS by mali použiť ako "lepšiu kalkulačku" na počítanie zdĺhavejších výpočtov až potom, keď pochopia teoretické princípy a sú schopní manuálne riešiť nie veľmi komplikované príklady. Napríklad pri počítaní derivácie zloženej funkcie, Jacobiho maticu funkcie $g \circ f$ dostaneme ako súčin Jacobiho matíc funkcií g a f. Ak funkcie f a g sú zložité, potom výpočet Jacobiho matice funkcie $g \circ f$, pre $f: \Re^5 \to \Re^6$ a $g: \Re^6 \to \Re^4$ vyžaduje pri ručnom počítaní značné úsilie. Vtedy výpočet urobíme automaticky pomocou PAS.

Podobne sa dá PAS použiť v úlohe "lepšej kalkulačky" vo väčšine tém diferenciálneho počtu.

Užitočnosť takýchto nástrojov pre počítanie medzivýsledkov, ktoré už boli analyzované a ktoré sú dôležité pre ďalšie fázy pedagodického procesu, je tiež nediskutovateľná. Napríklad pomocou PAS môžeme analyzovať hypotézu o existencii inverznej funkcie, pretože výpočty na overenie hypotézy sú rutinné. Týmto PAS šetrí čas, ktorý by sme museli venovať rutinným výpočtom a ktorý tak môžeme venovať lepším modelovým príkladom z reálnych situácií a ich interpretácii, keď v každej fáze riešenia máme k dispozícii aktuálne výsledky.

Ako príklad uvádzame riešenie nasledujúceho problému (pozri García, A., López, A., Romero, S., Rodríguez, G., de la Villa, A., 2002):

Teplota platne je v každom bode daná vzťahom $T(x,y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. *Teplotný alarm umiestnený na kružnici* $x^2 + y^2 = 25$ *sa spína pri teplote vyššej ako 180ºC a nižšej ako 20ºC. Zopne sa alarm?*

Na riešenie tohto problému študenti musia optimalizovať funkciu $T(x,y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$ vzhľadom na podmienku $x^2 + y^2 = 25$. Použijú metódu Lagrangeových multiplikátorov a výpočty urobia pomocou počítača. Ako možné riešenie dostanú body:

$$\{-2\sqrt{5}, \sqrt{5}\},\ \{2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}, \{-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}\},\ \{\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\}.$$

Vyčíslením hodnoty funkcie v týchto bodoch a ich porovnaním študenti nájdu extrémy a interpretujú výsledok. Keďže maximálna hodnota je nižšia ako 180 a minimálna hodnota je vyššia ako 20, alarm sa nezopne.

Okrem toho symbolické výpočty PAS dovoľujú efektívne pracovať aj s formálnymi výrazmi. Pomocou softvéru *Mathematica* je triviálne ukázať, že $div(grad\, f) = \Delta f$. Nasledujúci príkaz demonštruje vlastností medzi operátormi.

Načítame balík **Calculus`VectorAnalysis`**, zadáme

```
Div[Grad[f[x,y,z],Cartesian[x,y,z]]]-
Laplacian[f[x,y,z],Cartesian[x,y,z]]
```

a dostaneme výsledok 0.

Podobne je možné na reálnych situáciách ukázať platnosť všeobecných zákonov (príklad je z Marsden, J. and Weinstein, A., 1985):

Vzťah pre plyny medzi objemom V, tlakom P a teplotou T vyjadruje Van der Waalsova rovnica: $P = \frac{RT}{V-b} + \frac{a}{V^2}$, *kde a, b, R sú kladné koeficienty. R je univerzálna plynová* *konštanta, b reprezentuje objem molekúl plynu v kvapalnom stave (b<<V) a* $\frac{a}{V^2}$ *vyjadruje vnútorný tlak spôsobený medzimolukulovými interakciami.*

Pomocou vety o implicitnej funkcii študenti môžu dokázať, že ľubovolná dvojica vytvorená z premenných *V, P* alebo *T* môže byť dvojicou nezávisle premenných, pomocou ktorej sa potom vyjadrí tretia premenná. Taktiež vedia určiť parciálne derivácie $\frac{\partial}{\partial P}T$, $\frac{\partial}{\partial V}P$ a $\frac{\partial}{\partial T}V$ a overiť, že $\left(\frac{\partial}{\partial P}T\right)\left(\frac{\partial}{\partial V}P\right)\left(\frac{\partial}{\partial T}V\right)=-1$

PAS použijeme na overenie hypotézy vety o implicitnej funkcii a na symbolické výpočty. Následne môžeme od študentov žiadať, aby zovšeobecnili túto vetu pre funkciu s *n* premennými.

4.4. Rozdiel medzi algebrickými a nealgebrickými operáciami

Použitie PAS nie je všeliek, ktorý sa dá nasadiť na riešenie každého problému. Je dôležité, aby študenti vedeli rozlíšiť, ktoré procesy sú algoritmické a ktoré nie sú. V prípade, že proces môže byť "algoritmizovaný", študenti by mali byť vedení k zostavovaniu jednoduchých procedúr, v ktorých preložia matematický postup do jazyka PAS.

V rámci algoritmických procesov, je vhodné rozlišovať dva typy:

● Algoritmus s istou odpoveďou, v ktorej vždy dostaneme výsledok.

Napríklad študent môže veľmi jednoducho zostaviť v *Maple* procedúru, ktorá počíta dotykovú rovinu ku ploche, zadanej implicitne rovnicou F(x,y,z)=0, v bode (a,b,c). Stačí, aby poznal definíciu a vedel napísať príkazy na nájdenie gradientu (normálový vektor dotykovej roviny) a rovnicu dotykovej roviny. Procedúra môže vyzerať napríklad takto:

```
> Tang_Plane:=proc(F,a,b,c)
 local gr;
 gr:=subs({x=a,y=b,z=c}, linalg[grad](F(x,y,z),[x,y,z]));
 simplify(gr[1]*(x-a)+gr[2]*(y-b)+gr[3]*(z-c)=0)
 end:
```

Nato, aby sme mohli použiť procedúru aj neskôr pri riešení úloh, je potrebné, aby boli splnené podmienky vety o implicitnej funkcii. Procedúru rozšírime o výpis, ktorý bude informovať, či funkcia spĺňa podmienky alebo nie. Taktiež môžme pridať príkaz na nakreslenie plochy a dotykovej roviny.

Študenti sa zvyčajne pokúšajú zdokonaliť procedúru dovtedy, dokedy je to možné.

- Algoritmy, kde môže nastať výpočtový problém.

V tomto type algoritmov je výsledok podmienený úlohami, ktoré sa nemusia dať vykonať alebo neexistuje ich riešenie, napríklad neriešiteľný systém rovníc, nadmerné požiadavky na počítačový systém, ap. Napríklad pri počítaní viazaných extrémov, algoritmus riešenia pomocou Lagrangeových multiplikátorov vyžaduje riešenie systému rovníc, ktoré nie vždy existuje.

Nealgoritmické procesy, ako napríklad hľadanie limity, vyžadujú pri interaktívnom použití PAS riadenie. Môžeme navrhnúť alternatívy - použiť negatívne kritérium, ako napríklad opätovné spustenie procedúry alebo pozitívne kritérium, keď napríklad použijeme transformáciu do polárnych súradníc (pozor, vyžaduje si opatrnosť – pozri nasledujúcu časť). Funkcia $f(x,y)$ sa po transformácii $x = \mathrm{a} + \mathrm{r}\cos\varphi$, $y = \mathrm{b} + \mathrm{r}\sin\varphi$, zmení na funkciu $F(r, \varphi)$. Ak táto funkcia má limitu pre $r \to 0$ (nezávisiacu od uhla φ) , potom existuje limita funkcie $f(x,y)$ v bode (a, b).

4.5. Podporovanie kritického ducha

Je zrejmé, že PAS enormne uľahčia kontrolovanie výsledkov, pretože sa dajú veľmi ľahko použiť alternatívne metódy. Študenti by si nemali vypestovať slepú vieru v počítač, vo výstup s výsledkami alebo medzivýsledkami. Miesto toho by sa mali vždy pokúšať kontrolovať situáciu; výsledky by mali v každom prípade korešpondovať s kontextom problému, ktorý riešia. Musíme poznamenať, že nedbalé používanie PAS môže viesť k chybám, o ktorých študenti nie vždy vedia, zapríčinené predošlým postupom a pod.

Obmedzenia PAS, situácie, kedy sa výsledky výpočtov PAS líšia od očakávaných výsledkov, pomáhajú u študentov formovať kritické vedomie.

Keď v systéme *Maple* zadáme

```
> mtaylor(sin(x*y)/(x*y), [x=0, y=0],10);
```

očakávame správny výsledok $1-\frac{x^2y^2}{6}+\frac{x^4y^4}{120}$. Avšak výsledok na počítači je $1-\frac{x^2y^2}{6}$.

Chybný výsledok v PAS môže zapríčiniť aj zlyhanie programu alebo podmienky pre premenné, ktoré užívateľ zabudne zohľadniť (pozriAlonso, F., García, F., Hoya, S., Rodríguez, G., de la Villa, A., 2001).

Študenti niekedy nedostatočne venujú pozornosť formálnemu počtu, čo tiež sťažuje používanie PAS.

Pri počítaní limity funkcie

$$f(x, y) = \frac{3x - 3x^2 + x^3 - 4y + 6y^2 - 4y^3 + y^4}{-2 + 3x - 3x^2 + x^3 + 4y - 6y^2 + 4y^3 - y^4}$$

v bode (1,1) použijeme transformáciu do polárnych súradníc (pozri 4.4), kde a=b=1. Dostaneme tranformovanú funkciu

$$F(r,\theta) = \frac{\cos(\theta)^3 + r\sin(\theta)^4}{\cos(\theta)^3 - r\sin(\theta)^4}.$$

Mathematica aj *Maple* vypočíta limitu tejto funkcie pre r→ 0 rovnú 1. Hoci výsledok zjavne nezávisí na θ, je nesprávny. Keď $\theta = \pi/2$, potom limita je rovná -1. Z toho vyplýva, že dvojná limita neexistuje.

Študenti by mali získať potrebu výsledky kontrolovať.

5. Záver

Cieľom tohto článku je navrhnúť spôsob využitia matematického softvéru ako pedagogického nástroja. Grafické možnosti softvérových balíkov pomáhajú porozumieť niektorým matematickým princípom v diferenciálnom počte funkcie viac premenných.

Poukázali sme tiež na ďalšie možnosti využitia softvéru: oprostenie od mechanickej práce, možnosti experimentovania, rozlíšenie algoritmických a nealgoritmických procesov a najmä na dôležitosť mať kritického ducha a vždy hodnotiť výsledky, ktoré dostaneme.

Ďalej stojí za povšimnutie zmieniť sa o dôležitosti podporovania zmien v spôsobe myslenia učiteľov, ktorí tieto témy učia.

Výber softvérového balíka by nemal byť rozhodujúci. Oveľa dôležitejší je spôsob, akým sa využíva. Tie isté myšlienky a postupy s ohľadom na príslušný softvér môžu byť rovnako efektívne aj pri použití rozličných balíkov.

Možnosti používania nových technológií nie sú limitované prezenčným vyučovaním, pripravený učebný materiál môžeme použiť aj na virtuálne dištančné vzdelávanie, pretože sa dá bez zvláštnych problémov zverejniť online na webe. V každom prípade sa tento materiál môže doplniť o príručku, ktorá uľahčí jeho použitie.

LITERATÚRA

Alonso, F., García, A., García, F., Hoya, S., Rodríguez, G., de la Villa, A , 2001, "Some unexpected results using Computer Algebra Systems ", *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, **8**, 239-252.

García, A., López, A., Romero, S., Rodríguez, G., de la Villa, A., 2002, *Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables*. Clagsa.
Marsden, J. And Weinstein, A., 1985, *Calculus III*. Springer-Verlag.

Preložila Daniela Richtáriková