

## Úvod

Vývoj informačných a počítačových technológií sa v priebehu uplynulých desiatich rokov urýchlil opäť nevídaným tempom. Najväčšie zmeny boli zaznamenané najmä v dvoch oblastiach: cena výpočtovej techniky sa výrazne znížila, pričom súčasne rovnako výrazne vzrástla výpočtová výkonnosť počítačov. V dôsledku takéhoto vývoja dnes už väčšina študentov v celej Európe buď vlastní osobný počítač, alebo má prístup ku kvalitnej výpočtovej technike na svojej univerzite. Učiteľom sa zároveň otvorili nové možnosti organizácie výuky a riadenia vzdelávacieho procesu. Nové príležitosti učiť a učiť sa matematiku s podporou počítačových algebrických systémov sú aj pre študentov omnoho atraktívnejšie. Existuje mnoho spôsobov ako využiť početné výhody poskytované využitím počítačov vo výuke a podporiť tak vzdelávanie v oblasti matematiky.

Prvou zo spomínaných výhod je možnosť vizualizácie. Mnohé z matematických pojmov sa dajú prezentovať omnoho prístupnejšie a zrozumiteľnejšie, ak ich ilustrujeme vhodným obrázkom. Grafické možnosti počítačov dnes poskytujú mnoho rôznych spôsobov, ako vizualizáciu jednoducho vytvoriť a poskytnúť ju študentom. Aj pre študentov samotných je generovanie vlastnej vizualizácie a grafického výstupu pomerne jednoduchou záležitosťou.

Druhou výhodou je možnosť zbaviť sa množstva manuálnych mechanických výpočtov. Často sa stáva, že študenti strácajú prehľad o študovanom kľúčovom pojme, keď sú k jeho objasneniu potrebné mnohé výpočty a úpravy. Vykonávanie týchto výpočtov a úprav sa potom stáva samotným cieľom, namiesto uchopenia pôvodného pojmu s porozumením potrebným matematickým princípom. Pri efektívnom použití môže počítačová technika odstrániť spomínané šumy a umožní používateľovi sústrediť sa na porozumenie princípom a pochopenie pojmov.

Tretou výhodou používania výpočtovej techniky je skutočnosť, že študenti s jej pomocou zvládnu vyriešiť omnoho väčšie množstvo rôznorodých zložitejších (a tým aj omnoho realistickejších) problémov. Iba tí najusilovnejší študenti sa pustia do riešenia sústavy 6-ich lineárnych rovníc manuálnym výpočtom ceruzkou na papieri. Ale s použitím počítačov bude aj riešenie sústavy stoviek rovníc iba obyčajnou rutinnou záležitosťou.

Spomínané tri výhody sa dajú využiť, určite aspoň čiastočne, už pri používaní štandardných softvérov a jednoduchých ukázkových príkladov. Existuje však aj mnoho špeciálnych aplikácií, ktoré využívajú výpočtovú výkonnosť súčasných počítačov na prezentáciu matematiky omnoho komplexnejším spôsobom. Táto rukoväť má za cieľ predstaviť matematické softvérové aplikácie, ktoré sa najčastejšie používajú na pedagogické účely. Mnohé z nich boli pre tieto účely špeciálne vyvinuté. Niektoré boli pôvodne vytvorené pre profesionálnych matematikov, ktorí vo svojej práci potrebovali počítačovú podporu pre zložité symbolické výpočty, či zvládnutie obrovského množstva výpočtov nerealizovateľných človekom v reálnom čase. Napriek tomu sú mnohé z nich ľahko integrovateľné aj vo vzdelávacom procese.

V ideálnom svete by mali mať všetci učitelia voľný prístup k existujúcim matematickým softvérom, aby si ich mohli pre vlastnú potrebu porovnať. V skutočnosti však je z finančných dôvodov neúnosné používať viac ako jeden až

dva, okrem tých, ktoré tvorcovia ponúkajú zadarmo. Ponúknutý stručný návod pre prácu, ukážky syntaxe a niekoľko riešených príkladov pomôžu perspektívnym používateľom orientovať sa v možnostiach jednotlivých softvérov a umožní záujemcom o prácu s nimi vybrať si ten, ktorý bude pre ich potreby najvhodnejší.

Kapitola 2 prináša niekoľko všeobecných informácií o nových metódach a spôsoboch výučby matematiky vo veku počítačov, o nových pedagogických problémoch, ktoré informačné a komunikačné technológie vnášajú do pedagogického procesu a o možnostiach a výhodách počítačom podporovanej výuky. Prináša celkový prehľad o situácii v európskych krajinách a spôsoboch, ako sa s novou situáciou vyrovať a nájsť adekvátne didaktické metódy stimulujúce aktívne vzdelávanie a podporujúce optimálne využívanie dostupných technológií a softvérových riešení .

*GeoGebra* je interaktívny softvérový balík, ktorý je bezplatne dostupný od roku 2001. Autorom projektu je Markus Hohenwarter z Univerzity v Salzburgu, kde sa celý projekt začal a teraz pokračuje na Floride na Atlantic University. Softvér získal niekoľko európskych ocenení za kvalitu. Je napísaný v jazyku Java a je voľne k dispozícii na stiahnutie na stránke [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). Ako napovedá už názov aplikácie, *GeoGebra* je určená najmä na demonštráciu geometrických a algebrických pojmov, ale dá sa použiť aj na derivovanie a integrovanie funkcií. Okrem výhody, že je dostupná bezplatne, jej použitie je veľmi jednoduché, a jej používatelia majú možnosť prispieť svojimi nápadiami a prezentovať svoje materiály na webstránke *GeoGebra*. Komunita používateľov aplikácie *GeoGebra*, ktorí pravidelne prispievajú na stránku svojimi materiálmi, sústavne narastá. V kapitole 3 sa čitateľ dozvie podrobnosti o stiahnutí, inštalácii a spustení procedúr aplikácie *GeoGebra*, predstavené sú rôzne ovládacie tlačidlá a nástroje softvéru. V kapitole 4 je opísaná tvorba jednoduchých apletov, o úsekovej rovnici priamky a o grafe kvadratickej funkcie.

Počítačový algebrický balík *Derive* bol vytvorený v sedemdesiatych rokoch minulého storočia a stal sa pomerne osvedčeným výpočtovým prostriedkom silno zastúpeným na školách v mnohých krajinách, najmä v Rakúsku. I keď je dnes *Derive* nahradzovaný systémom *TI-Nspire* firmy Texas Instruments, ktorý využíva grafické kalkulačky, stále sa používa na mnohých školách a univerzitách. Softvér *Derive* vznikol v 70-tych rokoch v softvérovej spoločnosti zo sídlom na Honolulu. Spoločnosť odkúpila firma Texas Instruments v roku 1999 s úmyslom integrovať softvér s ich produktom, kalkulačkami. Napriek tomu, že nie je natoľko všestranný ako iné väčšie softvérové aplikácie ako sú *Maple*, *Mathematica* alebo *MATLAB*, *Derive* je schopný vykonávať symbolické algebrické úpravy a ľahko si poradí aj s faktorizáciou veľkých čísel. Skutočnosť, že *Derive* nie je natoľko všeobecný ako niektoré iné aplikácie, môže byť v istých súvislostiach aj jeho výhodou, napr. v tom zmysle, že sa používa ako úvodný balík pre uvedenie do problematiky používania počítačových algebier. Kapitola 5 prináša čitateľovi krátky úvod o používaní *Derivu*, demonštruje jednoduchosť jeho použitia a upozorňuje na mnohé užitočné funkcie. Uvedené príklady využívajú grafické možnosti softvéru a zjednodušovanie lomených algebrických výrazov.

*Mathematica* je veľmi výkonný matematický nástroj, ktorý bol vyvinutý pre profesionálnych matematikov a výskumných pracovníkov. Dokáže spracovať extrémne veľké množstvo matematických operácií – omnoho viac, než by s najväčšou

pravdepodobnosťou prichádzalo do úvahy pre potreby bežného doktoranda. Prirodzeným dôsledkom tejto skutočnosti je vysoká cena softvéru. Nasledujúce interaktívne kapitoly sú úvodom do práce so systémom *Mathematica* - kapitola 6, a kapitola 7 obsahuje praktické ukážky a príklady.

Existuje niekoľko modifikácií softvéru *Mathematica*, ktoré pracujú na tom istom princípe ako materský softvér, majú však obmedzené funkcie – a preto nižšiu, prístupnejšiu cenu. Aplikácia *Calculus WIZ* je výkonným, interaktívnym výpočtárskym softvérovým riešením, ktoré využíva výpočtovú výkonnosť softvéru *Mathematica* a predstavuje relatívne lacnú a všestrannú softvérovú podporu vo výučbe matematiky, najmä diferenciálneho a integrálneho počtu, pre potreby stredných škôl až po univerzity. Táto samostatná aplikácia prichádza so špeciálne upraveným matematickým jadrom na báze technológie softvéru *Mathematica*. Na technológii softvéru *Mathematica* je založená aj ďalšia aplikácia *Mathematical Explorer*, ktorá je kombináciou textu, grafických informácií a matematických vzorcov v jednoduchých súboroch, ktoré sú plne interaktívne a dávajú používateľom možnosť lepšie pochopiť základné matematické pojmy. *Mathematical Explorer* poskytuje používateľom príležitosť objavovať mnoho zaujímavých skutočností o fyzikálnych a abstraktných javoch a porozumieť im pomocou výpočtov a vizualizácií. Databáza obsahuje aj životopisy významných matematikov minulosti a poskytuje tak učiteľom matematiky množstvo informácií a možností uviesť matematické pojmy ako myšlienky vytvorené reálnymi ľuďmi v historickom kontexte. Kapitola 8 je stručným úvodom do práce s aplikáciami *Calculus Wiz* a *Mathematical Explorer*, jednoduchosť práce s oboma je prezentovaná pomocou série ilustrácií úvodných a obslužných webstránok.

*Mathematica CalcCenter* je výpočtový softvér, ktorý je kombináciou výkonných výpočtových možností, pomerne jednoduchého intuitívneho pracovného prostredia a interaktívneho komunikačného rozhrania. Jeho cena je dvakrát nižšia ako cena štandardného balíka softvéru *Mathematica*. Hlavnou výhodou softvéru *CalcCenter* je 'InstantCalculator', metóda výpočtov využívajúca niektoré špecifické operácie aplikácie *Mathematica*. Najinovatívnejším prvkom InstantCalculadora je jeho schopnosť produkovať taký istý výstup ako *Mathematica*, i keď tento nie je implicitne zobrazený, používateľ ho však môže zabezpečiť priamou voľbou formy výstupu. Pomocou množstva grafických informácií sú v kapitole 9 prezentované hlavné funkcie a výhody aplikácie *Mathematica CalcCenter*. Zdôraznené sú hlavné rozdiely medzi oboma softvérovými balíkmi *Mathematica CalcCenter* a *Mathematica*, čo umožní čitateľom rozhodnúť sa, ktorý z nich je vhodnejší pre ich potreby.

web*Mathematica* zabezpečuje interaktívne výpočty a vizualizácie vykonávané na webstránkach, a je integráciou systému *Mathematica* s najnovšími technológiami web serverov celosvetovej siete www a sématického internetu. Umožňuje používateľom, aj tým, ktorí nepoznajú prostredie systému *Mathematica*, vykonávať komplexné výpočty priamo na webe, bez toho, aby tento systém vlastnili alebo hlbšie poznali jeho príkazy a funkcie. Tvorcovia súborov sa nemusia starať o zabezpečenie interaktívnej komunikácie so serverom a odstránenie chýb, ktoré zabezpečí web*Mathematica*. Tým sa otvára priestor pre tvorivú prácu, možnosť koncentrovať sa na vlastný obsah stránok a riešenia problémov, nie na detaily implementácie. V kapitole 10 čitatelia nájdu celkový prehľad možností systému web*Mathematica*, na základe ktorého sa môžu rozhodnúť, ktoré z nich prípadne využijú pri tvorbe

vlastných webstránok. V kapitole 11 je podrobne opísané konkrétne použitie a tvorba interaktívnych java apletov, na niekoľkých uvedených základných funkčných ukázkach, ktoré sú vhodné pre prácu v počítačovom laboratóriu, alebo pre samostatnú prácu na internete, či formou e-learningu.

Kapitola 12 je úvodom do práce so systémom *Maple*.

*MATLAB* (skratka pre *MAT*rix *LAB*oratory) je numerický softvérový balík. Na trhu bol prezentovaný firmou The Maths Works v roku 1984, a odvtedy sa stal jedným z najobľúbenejších matematických systémov, používaným rovnako vo vzdelávaní ako aj v priemysle, a to viac než miliónom používateľov. *MATLAB* disponuje paletou jednoduchých príkazov na vykonávanie maticových operácií, kresbu grafov funkcií a grafickú interpretáciu dát, implementáciu algoritmov, tvorbu užívateľských rozhraní, a komunikáciu s počítačovými programami v iných jazykoch. Aj keď sa špecializuje na numerické výpočty, k dispozícii je dodatočná paleta nástrojov umožňujúca prepojenie so symbolickým výpočtovým systémom *Maple*, ktorá ho transformuje na plnohodnotný počítačový algebrický systém. Najnovšia verzia systému *MATLAB* je R2008a, zverejnená 1. marca 2008. Kapitola 13 poskytuje úvodné informácie o softvéri *MATLAB*, ukážky série príkazov – vstupov a výstupov, vrátane niekoľkých príkladov na kresbu grafu funkcie. Väčšina príkladov sa orientuje na lineárnu algebru, vektory a matice, čo je oblasť matematiky, pre ktorú je systém *MATLAB* obzvlášť vhodný a ľahko aplikovateľný.

Kapitola 14 prináša niekoľko všeobecných rád používateľom počítačových algebrických systémov ako najlepšie využiť ich výhody. Predpokladaná je znalosť základných princípov práce so systémom *Maple* či *Mathematica*, ale kapitola je zrozumiteľná aj ako úvodná informácia pre ktorýkoľvek z týchto softvérov. Aj keď je špeciálne venovaná problematike funkcií viac premenných na úrovni univerzitného štúdia, prezentované všeobecne platné myšlienky môžu byť použité v ktorejkoľvek matematickej oblasti pri návrhu kurzu, v ktorom sa počíta s použitím niektorého matematického softvéru.

Problémy s efektívnou reprodukciou matematických znakov a vzorcov na internete pretrvávali mnoho rokov. HTML súbory využívali konverziu matematických výrazov do grafickej formy, obrázkov – grafických súborov formátu gif, ktoré sú súčasťou dokumentov prezentovaných webovými prehliadačmi on-line. Tým sa pomerne výrazne líšila kvalita vytlačeného textu obsiahnutého v html dokumente, od kvality matematických vzorcov vo forme obrázkov z nízkym rozlíšením. Matematické vzorce vo forme obrázkov na html stránke predstavovali ďalej nepoužiteľnú informáciu, ktorá sa nedala reprodukovat', nebola nositeľkou sémantickej informácie a nedala sa vložiť kopírovaním na priame vyhodnocovanie v žiadnom matematickom softvéri. Vytvorenie priameho kódovacieho jazyka *MathML* (Mathematical Markup Language) radikálne zlepšilo situáciu a umožnilo presnú reprodukcii matematických dokumentov na internete, sémantické kódovanie matematických formlí a živú matematiku na webe. Kapitola 15 poskytuje všeobecný úvod do kódovacieho jazyka *MathML 2.0*, zdôrazňujúci výhody jeho použitia a možnosti prezentácie a sémantickej interpretácie matematických výrazov. Pre záujemcov, ktorí majú chuť vytvoriť svoje vlastné dokumenty s *MathML* kódovaním, je k dispozícii niekoľko prehľadných tabuliek so základnými príkazmi, prvkami, funkciami, operátormi a reláciami,

konštantami a symbolmi. Uvedené sú aj základné informácie o syntaxe a implementácii funkčných xml súborov v rôznych prostrediach.

*SciWriter* editor je lacným riešením pre autorov, ktorí majú záujem publikovať matematické články on-line s *MathML* kódovaním matematických formúl, ale pred priamym zápisom kódu radšej uprednostia použitie jednoduchého editora porovnateľného s editorom rovníc Microsoft Equation Editor vo Word. *Sciwriter* umožňuje napísať a vyprodukovať prezentačné xml súbory s elegantným matematickým textom pomerne rýchlo a jednoducho, pomocou palety nástrojov alebo klávesových skratiek. Kapitola 16 demonštruje možnosti tohto editora graficky ilustrované na záberoch obrazovky, a upozorňuje tiež na možnosť kopírovať vzorce kódované v MathML medzi editorom *Sciwriter* a matematickými softvérmi *Maple* alebo *Mathematica*.