INTEGROVANIE POMOCOU SUBSTITÚCIE

Substitučná metóda – princíp

Substitúcia predstavuje jednu z najúčinnejších metód analytického aparátu integrovania. Existuje veľa rôznych substitúcií, ktoré sa dajú pri výpočtoch užitočne použiť. Výber z najdôležitejších substitúcií uvádzame v nasledujúcich častiach.

Hlavnou myšlienkou substitučnej metódy je vo výpočte ekvivalentne nahradiť pôvodný integrál takým integrálom, ktorý sa ľahšie vypočíta.

Princíp spočíva v tom, že v integráli $\int f(x)dx$ nahradíme pomocou jednoduchého priradenia $x=\varphi(t)$ nezávislú premennú x novou premennou t. To znamená, že:
$(x)'_x=[\varphi(t)]'_t \Rightarrow 1.dx=\varphi'(t)dt$ a $f[\varphi(t)]$.

Následne, $\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$.

Niekedy je výhodné použiť substitúciu $t=\psi(x)$.

Algoritmus výpočtu integrálu $\int f(x)dx$ ***substitučnou metódou.***

Krok 1. Nájdi pre svoju úlohu vhodnú substitúciu.
Krok 2. V integrande nahraď premennú x premennou t a vyjadri zo substitučného vzorca dx. Zostav nový integrál $\int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$.

Krok 3. Vypočítaj nový integrál $\int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$.

Krok 4. Transformuj primitívnu funkciu $F(t)$ na pôvodnú premennú x.

Príkazy v Maple.

```
>I:=int(f,x);
>Int(f,x);
```

Príkaz počíta integrál funkcie **f** podľa premennej **x**;

```
>with(student):changevar(x=t^2,I);
```

Integrovanie pomocou substitúcie

Príkaz v integráli **`I`** nahradí premennú x premennou t pomocou substitučného vzorca $x = t^2$.

Príkazom

```
>I1:=value(%);
```

určíme v programe *Maple* hodnotu posledného výstupu (integrál).

<u>Príklad.</u> Vypočítajte integrál

$$I_0 = \int \frac{dx}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

<u>Matematické riešenie.</u>

Zavedieme substitúciu: $\sqrt{x} = t > 0 \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$. Potom

$$I_0 = \int \frac{2tdt}{2\left(t^2+1\right)t} = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C = arctg\sqrt{x} + C.$$

<u>Riešenie v Maple.</u>

```
>I0:=int(1/(2*(x+1)*sqrt(x)),x);
```

$$I0 := arctg\left(\sqrt{x}\right)$$

<u>Podrobné riešenie v Maple.</u>

1) do programu ***STUDENT*** zadáme integrál:

```
>with(student):
>I0:=Int(1/(2*(x+1)*sqrt(x)),x);
```

$$I0 := \int \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}dx$$

2) za premennú x dosadíme t^2:

```
>changevar(x=t^2,I0);
```

$$\int \frac{2t}{2\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2}}dt$$

3) vypočítame integrál:

```
>I0:=value(%);
```

$$I_0 = \frac{t.arctan(t)}{\sqrt{t^2}}$$

4) vrátime sa ku premennej x:

```
>I0:=subs(t=sqrt(x),I0);
```

$$I_0 = arctan\left(\sqrt{x}\right)$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

Matematické riešenie.

Zavedieme substitúciu: $\left\{ x = \frac{2}{t} \Rightarrow dx = -\frac{2}{t^2}dt \right\}$. Potom

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{\frac{2}{t}\sqrt{\frac{4}{t^2}-4}} = \frac{t^2}{4\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow$$

$$I_1 = \int \frac{t^2}{4\sqrt{1-t^2}}\left(-\frac{2}{t^2}\right)dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}arcsin\,t + C = -\frac{1}{2}arcsin\frac{2}{x} + C.$$

Podrobné riešenie v Maple.

```
>restart: with(student):
>I1:=Int(1/(x*sqrt(x^2-4)),x):
>changevar(x=2/t,I1); I1:=value(%);
>I1:=subs(t=2/x,I1);
```

$$I1 := -\frac{1}{2}arcsin\left(\frac{2}{x}\right).$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_2 = \int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{1-e^x}}.$$

Matematické riešenie.

Po zavedení substitúcie $\left\{\sqrt{1-e^x}=t>0\right\}$ vieme vyjadriť primitívnu funkciu. Z $x=ln\left(1-t^2\right)\Rightarrow dx=\frac{-2t}{1-t^2}dt\Rightarrow$

$$I_2=\int\frac{e^{3ln\left(1-t^2\right)}}{t}.\frac{-2t}{1-t^2}dt=-2\int\frac{\left(1-t^2\right)^3}{1-t^2}dt=$$

$$=-2\int\left(1-t^2\right)^2dt=-2\left(t-2\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)+C=$$

$$=-2\left(\sqrt{1-e^x}-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-e^x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\sqrt{1-e^x}\right)^5\right)+C.$$

Podrobné riešenie v Maple.

```
>restart:with(student):
>I2:=Int(exp(3*x)/sqrt(1-exp(x)),x);
>changevar(sqrt(1-exp(x))=t,I2);
>I2:=value(%);
>I2:=subs(t=sqrt(1-exp(x)),I2);
```

$$I2:=-2\sqrt{1-e^x}-\frac{2}{5}\left(1-e^x\right)^{(5/2)}+\frac{4}{3}\left(1-e^x\right)^{(3/2)}.$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_3=\int\frac{2\,sin\,x.cos\,x}{cos^4\,x-1}dx.$$

Matematické riešenie.

Zavedieme substitúciu: $\left\{cos^2\,x=t\right\}$. Potom $dt=2\,cos\,x.\left(-sin\,x\right)dx$.

$$I_3=-\int\frac{dt}{t^2-1}=-arc\,t\,gt+C=arctg\left(cos^2\,x\right)+C$$

Podrobné riešenie v Maple.

```
>restart:with(student):
```

```
>I3:=Int(2*sin(x)*cos(x)/(cos(x)^4-1),x);
>changevar(cos(x)^2=t,I3);
>I3:=value(%);
>I3:=subs(t=cos(x)^2,I3);
```

$$I3 := arctanh\left(cos(x)^2\right).$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_4 = \int \frac{sin\sqrt[4]{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

Matematické riešenie.

Zavedieme substitúciu: $\left\{\sqrt[4]{x} = t\right\}$. Potom $x = t^4, dx = 4t^3dt \Rightarrow$

$$I_4 = \int \frac{sin\,t.4t^3dt}{t^3} = 4\int sin\,tdt = -4cos\,t + C =$$

$$= -4cos\sqrt[4]{x} + C.$$

Podrobné riešenie v Maple.

```
>restart:with(student):
>I4:=Int(sin(x^(1/4))/(x)^(3/4),x);
>changevar(x^(1/4)=t,I4); I4:=value(%);
>I4:=subs(t=x^(1/4),I4);
```

$$I4 := -4cos\left(x^{(1/4)}\right).$$

Integrovanie funkcie $f(x) = \left(ax^2 + bx + x\right)$ substitučnou metódou

Pri výpočte integrálov typu:

$$J_1 = \int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}dx,$$

$$J_2 = \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx$$

využívame vzťah

Integrovanie pomocou substitúcie

$$ax^2+bx+c=\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$. Ako substitúciu potom volíme $x+\frac{b}{2a}=t$ alebo $x=t-\frac{b}{2a}$ a $dx=dt$.

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_5=\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx.$$

Matematické riešenie.

Zavedieme substitúciu: $\{x-1=t\}$. Potom $x^2-2x+2=t^2+1$ a

$$I_5=\int\frac{2(t+1)-2}{t^2+1}dt=\int\frac{2t}{t^2+1}dt=\int\frac{1}{t^2+1}d\left(t^2+1\right)=$$
$$=ln\left|t^2+1\right|+C=ln\left|x^2-2x+2\right|+C.$$

Podrobné riešenie v Maple.

```
>restart:with(student):
>I5:=Int((2*x-2)/(x^2-2*x+2),x);
>changevar(x-1=t,I5); I5:=value(%);
>I5:=subs(t=x-1,I5);
```

$$I5:=ln\left((x-1)^2+1\right)$$

```
>simplify(I5);
```

$$I5:=ln\left(x^2-2x+2\right).$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_6=\int\frac{dx}{x^2+4x+8}.$$

Matematické riešenie.

Zavedieme substitúciu: $\{x+2=t\}$. Potom $x^2+4x+8=t^2+4$ a

$$I_6=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right)+C.$$

Podrobné riešenie v Maple.

```
>restart:with(student):
>I6:=Int(1/(x^2+4*x+8),x);
>changevar(x+2=t,I6); I6:=value(%);
>I6:=subs(t=x+2,I6);
```

$$I6 := \frac{1}{2} arctan\left(\frac{1}{2}x+1\right).$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_7 = \int \frac{3x-1}{x^2+4x+5}dx.$$

Matematické riešenie.

Zavedieme substitúciu: $\{x+2=t\}$. Potom $x^2+4x+5=t^2+1$ a

$$I_7 = \int \frac{3t-7}{t^2+1}dt = 3\int \frac{t}{t^2+1}dt - 7\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+1}d\left(t^2+1\right) - 7arctgt =$$

$$= \frac{3}{2}ln\left|t^2+1\right| - 7arctgt + C =$$

$$= \frac{3}{2}ln\left|x^2+4x+5\right| - 7arctg\left(x+2\right) + C.$$

Podrobné riešenie v Maple.

```
>restart:with(student):
>I7:=Int((3*x-1)/(x^2+4*x+5),x);
>simplify(changevar(x+2=t,I7));
>I7:=value(%);
>I7:=simplify(subs(t=x+2,I7));
```

$$I7 := \frac{3}{2}ln\left(x^2+4x+5\right) - 7arctg\left(x+2\right).$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_8 = \int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}\,dx .$$

Matematické riešenie.

Zavedieme substitúciu: $\left\{ x - \frac{3}{4} = t \right\}$. Potom

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(t^2 - \frac{1}{16} \right).$$

$$I_8 = \frac{1}{2}\int \frac{1-8t}{t^2 - \frac{1}{16}}\,dt = -8\int \frac{8t-1}{16t^2-1}\,dt =$$

$$= 8\int \frac{1}{(4t)^2-1}\,dt - 8.4\int \frac{2t}{(4t)^2-1}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{(4t)^2-1}\,d(4t) - 32\int \frac{1}{16t^2-1}\,dt^2 =$$

$$= ln\left|\frac{4t-1}{4t+1}\right| - 2\,ln\left|16t^2-1\right| + C =$$

$$= ln|4t-1| - ln|4t+1| - 2\,ln|4t-1| - 2\,ln|4t+1| + C =$$

$$= -ln|4t-1| - 3\,ln|4t+1| + C =$$

$$= -ln|4x-4| - 3\,ln|4x-2| + C =$$

$$= -ln4 - ln|x-1| - 3\,ln2 - 3\,ln|2x-1| + C =$$

$$= -5\,ln2 - ln|x-1| - 3\,ln|2x-1| + C =$$

Podrobné riešenie v Maple.

```
>restart:with(student):
>I8:=Int((7-8*x)/(2*x^2-3*x+1),x);
>I8:=simplify(changevar(x-3/4=t,I8));
>I8:=value(%);
>I8:=simplify(subs(t=x-3/4,I8));
```

$$I8 := -5\,ln(2) - 3\,ln(2x-1) - ln(x-1).$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_9 = \int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx.$$

Matematické riešenie.

Zavedieme substitúciu: $\{x-1=t\}$. Potom $x^2-2x+2=t^2+1$ a

$$I_9 = \int \frac{2(t+1)-2}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}d\left(t^2+1\right) =$$
$$= 2\sqrt{t^2+1}+C = 2\sqrt{x^2-2x+2}+C.$$

Podrobné riešenie v Maple.

```
>restart:with(student):
>I9:=Int((2*x-2)/sqrt(x^2-2*x+2),x);
>I9:=simplify(changevar(x-1=t,I9));
>I9:=value(%);
>I9:=simplify(subs(t=x-1,I9));
```

$$I9 := 2\sqrt{x^2-2x+2}$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_{10} = \int \frac{3x-5}{\sqrt{9+6x-3x^2}}dx.$$

Matematické riešenie.

Zavedieme substitúciu: $\{x-1=t\}$. Potom $9+6x-3x^2 = 3\left(4-t^2\right)$

a

$$I_{10} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{3t-2}{\sqrt{4-t^2}}dt = \frac{3}{\sqrt{3}}\int \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}dt - \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}dt =$$
$$= -\sqrt{3}\int \frac{1}{2\sqrt{4-t^2}}d\left(4-t^2\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}arcsin\frac{t}{2}+C =$$
$$= -\sqrt{3\left(4-t^2\right)} - \frac{2}{\sqrt{3}}arcsin\frac{t}{2}+C =$$
$$= -\sqrt{9+6x-3x^2} - \frac{2}{\sqrt{3}}arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

Podrobné riešenie v Maple.

```
>restart:with(student):
>I10:=Int((3*x-5)/sqrt(9+6*x-3*x^2),x);
>I10:=simplify(changevar(x-1=t,I10));
>I10:=value(%);
>I10:=simplify(subs(t=x-1,I10));
```

$$I10 := -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,arcsin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{9+6x-3x^2}\,.$$

Príklady na precvičenie

Vypočítajte pomocou substitúcie:

$$I_{11}=\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}+9}dx\,,$$

Výsledok: $I_{11}=\frac{1}{6}arctg\left(\frac{e^{2x}}{3}\right)+C$,

$$I_{12}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)},$$

Výsledok: $I_{12}=\frac{3}{2}ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|+C$

$I_{13}=\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, použite substitúciu $x=a(1-t)$,

Výsledok: $I_{13}=\pm arccos\frac{a-x}{a}+C$

$$I_{14}=\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx,$$

Výsledok: $I_{14}=ln\left(e^x-1\right)^2-x+C$.

$$I_{15}=\int\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}dx,$$

Výsledok: $I_{15} = ln\left|x^2 + x + \frac{1}{2}\right| + arctg\left(2x+1\right) + C$

$I_{16} = \int \frac{2x-5}{x^2+4x+5}dx$,

Výsledok: $I_{16} = ln\left|x^2+4x+5\right| - 9arctg\left(x+2\right) + C$

$I_{17} = \int \frac{x+1}{3x^2+6x+2}dx$,

Výsledok: $I_{17} = \frac{1}{6}ln\left|x^2+2x+\frac{2}{3}\right| + C$,

$I_{18} = \int \frac{x+2}{3x^2+6x+2}dx$

Výsledok: $I_{18} = \frac{1}{6}ln\left|x^2+2x+\frac{2}{3}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}x+\sqrt{3}\right) + C$

$I_{19} = \int \frac{x-1}{2x-3x^2}dx$

Výsledok: $I_{19} = -\frac{1}{3}ln\left|x-\frac{2}{3}\right| + \frac{1}{2}ln\left|\frac{x-\frac{2}{3}}{x}\right| + C$

$I_{20} = \int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx$,

Výsledok: $I_{20} = 2\sqrt{x^2+3x+5} - 7\,ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+5}\right| + C$

$I_{21} = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx$,

Výsledok: $I_{21} = \sqrt{x^2+3x+5} + C$

$I_{22} = \int \frac{4x+2}{\sqrt{2x^2-x+1}}dx$,

Výsledok: $I_{22} = 2\sqrt{2x^2-x+1} + \frac{3}{2}ln\left|\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2x^2-x+1}\right| + C$

$$I_{23}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}},$$

Výsledok: $I_{23}=ln\left|x+2+\sqrt{x^2-4x-3}\right|+C$

Kontrolný test

Vypočítajte integrály:

$$I_{24}=\int\frac{cos\sqrt[5]{x}dx}{\sqrt[5]{x^4}},$$

.

$$I_{25}=\int\frac{sin4xdx}{cos^4 2x+4},$$

$$I_{26}=\int\frac{sin2xdx}{\sqrt{cos^4 x+1}},$$

$$I_{27}=\int\frac{e^{\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{2x-3}}dx,$$

$$I_{28}=\int\frac{dx}{\sqrt{10x-x^2}},$$

$$I_{29}=\int\frac{3x+3}{2x^2-x-1}dx,$$

$$I_{30}=\int\frac{3x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx.$$

Kontrolné otázky

1) Vysvetlite princíp substitučnej metódy.

2) Ukážte príklad na použitie substitučnej metódy.

3) Vysvetlite ako sa používajú nasledovné príkazy *Maple*:

`with(student), changevar(x=t^2,I1),`

```
simplify(changevar(x=t^2,I1)),
I11:=value(%),I1:=subs(t=sqrt(x),I1),
I1:=simplify(subs(t=sqrt(x),I1)).
```