INTEGROVANIE PO ČASTIACH –METÓDA PER PARTES

Príklady

Nech funkcie $f(x), g(x), f'(x), g'(x)$ sú spojité na intervale $[a,b]$. Potom

$$\int f(x)g'(x)dx = \int f(x)dg(x) =$$
$$= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

skrátene

(1) $$\int udv = uv - \int vdu,$$

kde $u = f(x)$, $dv = g'(x)dx$ sú časti integrandu.

Vzorec (1) sa používa pri počítaní integrálov typu:

1) $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$,

kde $P_n(x)$ je polynóm n-tého stupňa a k je konštanta. Pri výpočte

a) polynóm $P_n(x)$ označíme ako premennú *u*, t.j. $u = P_n(x)$;

b) vzorec (1) aplikujeme n-krát.

2) $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$,

$\int P_n(x)\mathrm{arctg}\,xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}\,xdx$,

kde $P_n(x)$ je polynóm n-tého stupňa. Pri výpočte

a) $u = f(x) \neq P_n(x)$;

b) použijeme vzorec (1).

3) $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$

kde a,b sú ľubovoľné konštanty. Vo výpočte

a) $u = \cos bx$ alebo $u = \sin bx$;

b) vzorec (1) aplikujeme 2-krát.

Príkazy v Maple.

Pri počítaní v *Maple*, sa dá ľahko po krokoch sledovať celý postup výpočtu pomocou podprogramu

```
>with(student):
```

a príkazov

```
>intparts(A,u));
```

kde **A** je integrál

```
>A:=Int(f,x);
```

a funkcia **u** je definovaná podľa pravidiel 1) - 3).

Tiež je dobré použiť príkaz **simplify**, čím sa zjednoduší výsledok.

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_1 = \int (6x-3) sin 2x dx.$$

Matematické riešenie.

$$\left| \begin{array}{l} 6x-3 = u \Rightarrow du = 6dx \\ \int sin 2x dx = \int dv \Rightarrow v = -\frac{1}{2} cos 2x \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$I_1 = \int \underbrace{(6x-3)}_{u} d \underbrace{\left(-\frac{1}{2} cos 2x\right)}_{v} =$$

$$= \underbrace{(6x-3)}_{u} \underbrace{\left(-\frac{1}{2} cos 2x\right)}_{v} - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{2} cos 2x\right)}_{v} d \underbrace{(6x-3)}_{u} =$$

$$= (6x-3)\left(-\frac{1}{2} cos 2x\right) - \int -\frac{1}{2} cos 2x.6dx =$$

$$= -\frac{6x-3}{2} cos 2x + \frac{3}{2} sin 2x + C.$$

Riešenie v Maple.

```
>I[1]:=int((6*x-3)*sin(2*x),x);
```

$$I_1 := \frac{3}{2}sin(2x) - 3x\,cos(2x) + \frac{3}{2}cos(2x)$$

Postup výpočtu v Maple.

```
>with(student):
>A:=Int((6*x-3)*sin(2*x),x);
```

$$A := \int (6x-3)\,sin(2x)\,dx$$

```
>J:=simplify(intparts(A,6*x-3));
```

$$J := -\frac{6x-3}{2}cos(2x) + 3\int cos(2x)\,dx =$$

Výpočet integrálu $J_1 = 3\int cos(2x)\,dx$ vykonáme zvyčajným spôsobom:

```
>J[1]:=int(3*cos(2*x),x);
```

$$J_1 := \frac{3}{2}sin(2x)$$

Výsledok:

$$I_1 = -\frac{6x-3}{2}cos(2x) + J_1 =$$

$$= -\frac{6x-3}{2}cos(2x) + \frac{3}{2}sin(2x) + C.$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_2 = \int (x+2)\cos x\,dx.$$

Matematické riešenie.

$$I_2 = \int (x+2)\,d(\sin x) = (x+2)\sin x - \int \sin x\,d(x+2) =$$

$$= (x+2)\sin x - \int \sin x\,dx = (x+2)\sin x + \cos x + C.$$

Postup výpočtu v Maple.

```
>with(student):
>A:=Int((x+2)*cos(x),x);
```

$$A := \int (x+2)\cos(x)\,dx$$

```
>J:=simplify(intparts(A,x+2));
```

$$J := (x+2)\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$

```
>J[1]:=int(sin(x),x);
```

$$J_1 := -\cos(x)$$

Výsledok:

$$I_2 = (x+2)\sin x - J_1 = (x+2)\sin x + \cos x + C.$$

Riešenie v Maple (kontrola).

```
>A:=int((x+2)*cos(x),x);
```

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_3 = \int x^2 \sin x dx$$

Matematické riešenie.

$$\left\{\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ \int dv = \int \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$I_3 = \int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\sin xdx}_{dv} = \int \underbrace{x^2}_{u} d\underbrace{(-\cos x)}_{v} =$$

$$= -x^2 \cos x + \int \cos xd\left(x^2\right) = -x^2 \cos x + \int \cos x.2xdx =$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ \int dv = \int \cos xdx \Rightarrow v = \sin x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$I_3 = -x^2 \cos x + 2\int \underbrace{x}_{u} d\underbrace{(\sin x)}_{v} =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin xdx\right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Postup výpočtu v Maple.

```
>with(student):
>A:=Int(x^2*sin(x),x):
>J:=simplify(intparts(A,x^2));
```

$$J := -x^2\cos(x) + \int \cos(x)2x dx$$

```
>B:=2*Int(cos(x)*x,x):
>J[1]:=simplify(intparts(B,x));
```

$$J_1 : 2x\sin x - 2\int \sin x dx$$

```
>J[2]:=int(2*sin(x),x):
```

$$J_2 := -2\cos(x)$$

Výsledok:

$$I_2 = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_4 = \int e^{-2x}\cos x dx.$$

Matematické riešenie.

$$\left\{\begin{array}{l} u = e^{-2x} \Rightarrow du = -2e^{-2x}dx \\ \int dv = \int \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$I_4 = \int \underbrace{e^{-2x}}_{u}\underbrace{\cos x dx}_{dv} = \int \underbrace{e^{-2x}}_{u} d\underbrace{(\sin x)}_{v} =$$

$$= e^{-2x}\sin x - \int \sin x d\left(e^{-2x}\right) = e^{-2x}\sin x + 2\int \underbrace{\sin x}_{v}\underbrace{e^{-2x}}_{u} dx =$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = e^{-2x} \Rightarrow du = -2e^{-2x}dx \\ \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$I_4 = e^{-2x}\sin x + 2\int \underbrace{e^{-2x}}_{u} d\underbrace{(-\cos x)}_{v} =$$

$$= e^{-2x}\sin x - 2e^{-2x}\cos x + 2\int \cos x de^{-2x} =\backslash$$

$$= e^{-2x}\sin x - 2e^{-2x}\cos x - 4\int e^{-2x}\sin x dx \Rightarrow$$

$$I_4 = e^{-2x}\sin x - 2e^{-2x}\cos x - 4I_4 \Rightarrow$$

$$I_4 = \frac{1}{5}e^{-2x}\left(\sin x - 2\cos x\right) + C.$$

Postup výpočtu v Maple.

```
>with(student):
>A:=Int(exp(-2*x)*cos(x),x):
>J:=simplify(intparts(A,exp(-2*x)));
```

$$J := e^{(-2x)}\sin(x) + 2\int e^{(-2x)}\sin(x)dx$$

Potom

$$J := e^{(-2x)}\sin(x) + J_1.$$

Výpočet J_1:

```
>B:=2*Int(exp(-2*x)*sin(x),x):
>J[1]:=simplify(intparts(B,exp(-2*x)));
```

$$J_1 := -2e^{(-2x)}\cos(x) - 4\int e^{(-2x)}\sin(x)dx$$

a teda

$$J := e^{(-2x)}\sin(x) - 2e^{(-2x)}\cos(x) - 4J.$$

A nasleduje

$$J := \frac{1}{5}e^{(-2x)}\left(\sin x - 2\cos x\right) + C.$$

Riešenie v Maple (kontrola).

```
>J:=int(exp(-2*x)*cos(x),x);
```

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_5 = \int \frac{x^2}{x^2 + a^2}dx.$$

Poznámka. Tento integrál nazývame aj "100 000", pretože preň 100 000 študentov neurobilo skúšku z integrovania.

Matematické riešenie.

$$\left\{\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ \int dv = \int \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}d\left(x^2+a^2\right) \\ \Rightarrow v = -\frac{1}{2\left(x^2+a^2\right)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$I_5 = \int \underbrace{x}_{u} d\underbrace{\left(-\frac{1}{2\left(x^2+a^2\right)}\right)}_{v} =$$

$$= -\frac{x}{2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)}dx =$$

$$= -\frac{x}{2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a} arctg\,\frac{x}{a} + C.$$

Postup výpočtu v Maple.

```
>with(student):
>A:=Int(exp(-2*x)*cos(x),x):
>J:=simplify(intparts(A,exp(-2*x)));
```

???

Príklady na precvičenie

1) Vypočítajte:

$$I_6 = \int arctg\sqrt{2x-1}dx,$$

$$I_7 = \int ln(4x^2+1)dx,$$

$$I_8 = \int x^2 e^x dx,$$

$$I_9 = \int e^{3x} sin2xdx,$$

$$I_{10} = \int sin\,ln\,xdx.$$

Matematické riešenie integrálu ***I_6.***

$$\left| \begin{array}{l} arctg\sqrt{2x-1} = u \Rightarrow \\ du = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{2x-1}\right)^2} \cdot \dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}} dx = \dfrac{1}{2x\sqrt{2x-1}} dx \\ \int dx = \int dv \Rightarrow v = x \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$I_6 = x.arctg\sqrt{2x-1} - \int x \cdot \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}} dx =$$

$$= xarctg\sqrt{2x-1} - \int \frac{dx}{2\sqrt{2x-1}} =$$

$$= xarctg\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$$

Riešenie integrálu I_6 v Maple.

```
>I[6]:=int(arctan(sqrt(2*x-1)),x);
```

$$I_6 := \frac{1}{2}(2x-1)arctg\left(\sqrt{2x-1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + \frac{1}{2}arctg\left(\sqrt{2x-1}\right)$$

<u>Riešenia ďalších integrálov v Maple.</u>

```
>I[7]:=int(ln(4*x^2+1),x);
```

$$I_7 := x\,ln\left(4x^2+1\right)-2x+arctan\left(2x\right)$$

```
>I[8]:=int(x^2*exp(x),x);
```

$$I_8 := x^2e^x-2xe^x+2e^x$$

```
>I[9]:=int(exp(3*x)*sin(2*x),x);
```

$$I_9 := -\frac{2}{13}e^{(3x)}\,cos\left(2x\right)+\frac{3}{13}e^{(3x)}\,sin\left(2x\right)$$

```
>I[10]:=int(sin(ln(x)),x);
```

$$I_{10} := -\frac{1}{2}cos\left(ln\left(x\right)\right)x+\frac{1}{2}sin\left(ln\left(x\right)\right)x$$

2) Vypočítajte:

$$I_{11}=\int x^2\,sin\,x\,dx,$$

$$I_{12}=\int x\,ln\,x\,dx,$$

$$I_{13}=\int x^2e^{5x}dx,$$

$$I_{14}=\int x^5e^{x^2}dx,$$

$$I_{15}=\int e^{3x}\left(sin\,2x-cos\,2x\right)dx,$$

$$I_{16}=\int x\left(arctgx\right)^2dx,$$

$$I_{17}=\int\frac{x.arctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx,$$

$$I_{18}=\int\frac{x^2arctgx}{1+x^2}dx,$$

$$I_{19}=\int\frac{arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx,$$

$$I_{20}=\int x^4e^{3x}\,sin\,x\,dx,$$

$$I_{21}=\int ln\left(x^2+2\right)dx,$$

$$I_{22}=\int x^2\,ln\left(1+x\right)dx.$$

Kontrolný test

Vypočítajte:

$$I_{23} = \int arctg\sqrt{x}dx,$$

$$I_{24} = \int e^{2x} \cos x dx,$$

$$I_{25} = \int ln^2 x dx,$$

$$I_{26} = \int \frac{ln\, x}{x^3} dx.$$

Kontrolné otázky

1) Vysvetlite princíp integrovania metódou Per Partes.

2) Ako určíte funkciu **`u`**?

3) Vysvetlite, na čo sa používajú nasledovné príkazy *Maple*:

```
with(student):
A:=Int(f,x);
intparts(A,u));
simplify
```