Neurčitý integrál

Definície

Hlavnou úlohou diferenciálneho počtu je nájsť deriváciu $f'(x)$ alebo diferenciál $df(x) = f'(x)dx$ funkcie $f(x)$. Integrálny počet rieši opačný problém, hľadá funkciu $F(x)$ ktorej deriváciou je $f(x)$, t.j. $F'(x) = f(x)$ alebo $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

Integrálny počet sa hojne využíva v geometrii, mechanike, fyzike, rôznych technických disciplínach, ap.

Definícia. Funkciu $F(x)$, $x \in (a,b)$ nazývame primitívnou funkciou funkcie $f(x)$ na intervale (a,b), ak funkcia $F(x)$ je diferencovateľná $\forall x \in (a,b)$ a $F'(x) = f(x)$ alebo $dF(x) = f(x)dx$.

Definícia. Množinu všetkých primitívnych funkcií funkcie $f(x)$ na danom intervale (a,b), t.j. $\{F(x) + C\}$, kde C je konštanta, nazývame neurčitým integrálom $f(x)$ pre všetky x z intervalu (a,b). Zapisujeme

$$\boldsymbol{\int f(x)\,dx = F(x) + C}.$$

Symbol $\int$ je ***znak integrálu***, funkcia $\boldsymbol{f(x)}$ je ***integrand,*** $\boldsymbol{x}$ je ***premenná,*** symbol $\boldsymbol{dx}$ označuje premennú podľa ktorej sa integrál počíta a $\boldsymbol{C}$ je ***integračná konštanta.***

Pravidlá integrovania.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a \text{ - konštanta},$$

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{A}\int f(x)dAx,\ A \text{ - konštanta},$$

Neurčitý integrál

$$\int f(x)dx = \int f(x)d(x \pm A),\ A\text{- konštanta,}$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C,$$

kde $u(x)$ je diferencovateľná funkcia.

Všeobecné pravidlá integrovania.

$$d\left(\int f(u)du\right) = f(u)du,$$
$$\int dF(u) = F(u) + C$$
$$\int af(u)du = a\int f(u)du,$$
$$\int (f_1(u) \pm f_2(u))du = \int f_1(u)du \pm \int f_2(u)du,$$

kde u je diferencovateľná funkcia.

Pravidlá pri hľadaní primitívnej funkcie.

(1) $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1,$$

(2) $$\int e^x dx = e^x + C,$$

(3) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\,a} + C, a \neq 1,$$

(4) $$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C,$$

(5) $$\int sin\,xdx = -cos\,x + C,$$

(6) $$\int cos\,xdx = sin\,x + C,$$

(7) $$\int \frac{d}{cos^2 x} = tgx + C, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

(8) $$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C, x \neq k\pi,$$

(9) $$\int tgxdx = -ln\left|cos\,x\right| + C, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

(10) $$\int ctgxdx = ln\left|sin\,x\right| + C, x \neq k\pi,$$

(11) $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \ a \neq 0 \\ \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, \quad |x| < a \end{cases},$$

(12) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \ a \neq 0 \\ \frac{1}{a} arccotg\frac{x}{a} + C, \quad |x| > a \end{cases},$$

(13) $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, \ a \neq 0,$$

(14) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \ |x| > |a|,$$

(15) $$\int chxdx = shx + C,$$

(16) $$\int shxdx = chx + C,$$

(17) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C, \ |x| < |a|,$$

(18) $$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C,$$

(19) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Príkazy na integrovanie v Maple.

```
> int(f,x);
> Int(f,x);
```

kde **f** je integrand a $\boldsymbol{x}$ - premenná, podľa ktorej integrujeme.

Výsledok skontrolujeme pomocou **`J:=int(F,x)`** a príkazu

```
> diff(J,x);
```

Integrovanie podľa vzorcov

Existuje veľa integračných vzorcov. My v nasledujúcich príkladoch použijeme vzorce (1) - (19), pravidlá integrovania spolu s pravidlami hľadania primitívnych funkcií.

Integrál

$$\int f(x).g'(x)dx$$

sa často označuje aj ako

$$\int f(x).dg(x).$$

Týmto úkonom dostaneme funkciu $g'(x)$ ako diferenciál.

Príklad. Vypočítajte integrál

$$J_1 = \int \left(x^4 + 12x^3 - 3x + 5\right)dx.$$

Matematické riešenie. Podľa vzorca (1):

$$J_1 = \int x^4 dx + 12\int x^3 dx - 3\int x dx + 5\int dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} + 12.\frac{x^4}{4} - 3.\frac{x^2}{2} + 5 + C = \frac{x^5}{5} + 3x^4 - \frac{3x^2}{2} + 5 + C.$$

Riešenie v Maple.

```
>J[1]:=int(x^4+12*x^3-3*x+5,x);
```

$$J_1 := \frac{x^5}{5} + 3x^4 - \frac{3x^2}{2} + 5 + C.$$

dostaneme výsledok: $J_1 + C$, i.e. $\dfrac{x^5}{5} + 3x^4 - \dfrac{3x^2}{2} + 5 + C$.

alebo

```
>J[1]:=Int(x^4+12*x^3-3*x+5,x)=
 int(x^4+12*x^3-3*x+5,x);
```

$$J_1 := \int\left(x^4+12x^3-3x+5\right)dx = \frac{x^5}{5}+3x^4-\frac{3x^2}{2}+5.$$

Kontrola:

```
>diff(J[1],x);
```

$$x^4+12x^3-3x+5.$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$J_2 = \int 4\,sin^3 x.cos\,xdx$$

Matematické riešenie. Použitím (1) a pravidiel dostaneme

$$J_2 = 4\int sin^3 x.\left(cos\,x\right)dx = 4\int sin^3 xd\,sin\,x = 4.\frac{\left(sin\,x\right)^4}{4} =$$

$$= sin^4 x + C.$$

Riešenie v Maple.

```
>J[2]:=Int(4*sin(x)^3*cos(x),x)=
 int(4*sin(x)^3*cos(x),x);;
```

$$J_2 := \int 4\,sin^3 x.cos\,xdx = sin\left(x\right)^4$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_1 = \int\frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}}.$$

Matematické riešenie. Použitím (17) a pravidiel dostaneme

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dx2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\left(2\sqrt{2}x\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}arcsin\left(2\sqrt{2}x\right)+C$$

Riešenie v Maple.

```
>I[1]:=Int(1/sqrt(1-8*x^2),x)=
 int(1/sqrt(1-8*x^2),x);
```

$$I_1 := \int\frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}arcsin\left(2\sqrt{2}x\right)$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_2 = \int \frac{1+cos^2 x}{cos^2 x} dx .$$

Matematické riešenie. Použitím (7) a pravidiel dostaneme

$$I_2 = \int \left(\frac{1}{cos^2 x} + 1 \right) dx = \int \frac{1}{cos^2 x} dx + \int 1 dx = tgx + x + C .$$

Riešenie v Maple.

```
>I[2]:=int((1+cos(x)^2)/(cos(x)^2),x);
```

$$I_2 := \frac{sin(x)}{cos(x)} + x ,$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_3 = \int \frac{2x\,sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x} dx ,$$

Matematické riešenie. Použitím (1), (8) a pravidiel dostaneme

$$I_3 = \int \left(\frac{2x\,sin^2 x}{sin^2 x} + \frac{cos^2 x}{sin^2 x} \right) dx = 2 \int x dx + \int \frac{1 - sin^2 x}{sin^2 x} dx =$$

$$= 2\frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{sin^2 x} dx - \int 1 dx = x^2 - cotgx - x + C .$$

Riešenie v Maple.

```
>I[3]:=int((2*x*sin(x)^2+cos(x)^2)/
sin(x)^2,x);
```

$$I_3 := x^2 - cot\,g(x) - x$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_4 = \int \frac{dx}{(arcsin\,x)^2 \sqrt{1-x^2}} ,$$

Matematické riešenie. Použitím (1), (17) a pravidiel dostaneme

$$I_4 = \int (arcsin\,x)^{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$$
$$= \int (arcsin\,x)^{-2}\, d\,arcsin\,x = -\frac{1}{arcsin\,x} + C\,.$$

Riešenie v Maple.

```
>I[4]:=int(1/(arcsin(x)^2*sqrt(1-x^2)),x);
```

$$I_4 := -\frac{1}{arcsin(x)}$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_5 = \int \frac{\sqrt{ln\,x}}{x}dx\,,$$

Matematické riešenie. Použitím (4), (1) a pravidiel dostaneme

$$I_5 = \int (ln\,x)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int (ln\,x)^{\frac{1}{2}}\, d\,ln\,x = \frac{(ln\,x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$
$$= \frac{2\,ln\,x\sqrt{ln\,x}}{3} + C\,.$$

Riešenie v Maple.

```
>I[5]:=int(sqrt(ln(x))/x,x);
```

$$I_5 := \frac{2}{3}ln(x)^{\frac{3}{2}}$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_6 = \int e^x.sin\,e^x dx\,.$$

Matematické riešenie. Použitím (5), (1) a pravidiel dostaneme

$$I_6 = \int sin\,e^x\left(e^x\right)dx = \int sin\,e^x de^x = -cos\,e^x + C$$

Riešenie v Maple.

```
>I[6]:=int(exp(x)*sin(exp(x)),x);
```

$$I_6 := -cos\left(e^x\right)$$

Príklad. Vypočítajte integrál

$$I_7 = \int \frac{x^3}{x^8 - 2} dx\,.$$

Matematické riešenie. Použitím (12) a pravidiel dostaneme

$$I_7 = \int \frac{\left(x^3\right)}{x^8 - 2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(x^4\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} dx^4 =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}} ln \left| \frac{x^4 - 2}{x^4 + 2} \right| + C\,.$$

Riešenie v Maple.

```
>I[7]:=Int(x^3/(x^8-2),x)=
 int(x^3/(x^8-2),x);
```

$$??\, I_7 := \int \frac{x^3}{x^8 - 2} dx$$

Príklady na precvičenie

Vypočítajte integrály:

(1) $$\int \left(3^x + 3^{3x}\right) dx,$$

(2) $$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x}},$$

(3) $$\int \frac{e^{2x}}{e^x - e^{-x}} dx,$$

(4) $$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx,$$

(5) $$\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

(6) $$\int (5x+1)^5 dx,$$

(7) $$\int \frac{dx}{2x-3},$$

(8) $$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx,$$

(9) $$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx,$$

(10) $$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}},$$

(11) $$\int \frac{x dx}{1+x^4},$$

(12) $$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(4-x)},$$

(13) $$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx,$$

(14) $$\int sin(3-2x)\,dx,$$

(15) $$\int tgx dx,$$

(16) $$\int \frac{1+ln\,x}{x}dx,$$

(17) $$\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx,$$

(18) $$\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

(19) $$\int \frac{2x-\sqrt{arcsin\,x}}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

(20) $$\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$$

(21) $$\int \frac{1+ln\,x}{2x}dx.$$

Kontrolný test

(1) $$\int \frac{xdx}{1+x^2},$$

(2) $$\int e^{cos^2 x} sin\,2xdx,$$

(3) $$\int \frac{dx}{x^2-4x+13},$$

(4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}},$$

(5) $$\int \frac{dx}{x.cos^2(1+ln\,x)},$$

(6) $$\int \sqrt[7]{(x-7)^2}dx,$$

(7) $$\int cos\,3xdx.$$

Kontrolné otázky

1. Napíšte definíciu neurčitého integrálu.
2. Napíšte pravidlá integrovania.
3. Napíšte všetky pravidlá, ktoré môžete použiť pri hľadaní primitívnych funkcií.
4. Vysvetlite, na čo sa používajú nasledovné príkazy programu *Maple*: `int(f,x)`, `Int(f,x)`, `diff(f,x)`. Ukážte na príkladoch.