Maple: Riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc

Diferenciálna rovnica je rovnica, ktorá obsahuje derivácie jednej alebo viacerých neznámych funkcií. Riešiť diferenciálnu rovnicu znamená nájsť takú funkciu (alebo každú takú funkciu), ktorá vyhovuje danej diferenciálnej rovnici. Mnohé zo základných zákonov fyziky, chémie, biológie a ekonómie sa dajú formulovať ako diferenciálne rovnice. Diferenciálne rovnice sú často klasifikované podľa rádu. Rádom diferenciálnej rovnice je rád najvyššej derivácie, ktorá sa v danej rovnici nachádza. Obyčajná diferenciálna rovnica (ODR) je diferenciálna rovnica, v ktorej vystupuje neznáma funkcia jednej premennej. V tejto kapitole sa budeme zaoberať iba ODR prvého a druhého rádu.

Všeobecné riešenie ODR prvého rádu

Budeme riešiť nasledujúcu ODR prvého rádu

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad y(0) = 2 \qquad (1)$$

Ide o pomerne jednoduchú rovnicu, ale postup pri jej riešení nám umožní ilustrovať, ako postupovať pri hľadaní riešenia ľubovoľnej ODR pomocou systému Maple. Všimnime si, že rovnica (1) je začiatočná podmienka. Znamená, že sa snažíme nájsť exaktné riešenie vyhovujúce začiatočnej podmienke, v našom prípade $y(0) = 2$: teda hodnota y pre $x = 0$ je 2. Problém sa najprv pokúsime vyriešiť bez ohľadu na začiatočnú podmienku a získame všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice. Pred tým, ako začneme hľadať riešenie ODR pomocou systému Maple, si musíme objasniť niektoré príkazy a funkcie, ktoré budeme potrebovať. Príkazy na riešenie ODR v systéme Maple sú uložené v balíku "DEtools". Ďalšie príkazy pre kresbu riešení ODR - integrálnych kriviek nájdeme v balíku "plots". prvým krokom preto bude otvorenie týchto balíkov pomocou príkazov:

```
> with(plots):
> with(DEtools):
```

Ďalším krokom je vklad - zápis ODR, ktorú chceme vyriešiť. Treba si pamätať, že funkcia *y* má premennú *x* , a preto je nevyhnutné zapisovať ju ako y(x), aby systém Maple mohol jednoznačne rozpoznať závisle a nezávisle premennú.

Rovnicu (1) označíme ako ODE1 pomocou priraďovacieho operátora.

- ODE1:=diff(y(x),x)=2*x*y(x);

$$ODE1 := \frac{d}{dx}\ y(x)=2\ x\ y(x)$$

Príkaz na riešenie ODR je dsolve. Ak nepoznáme štruktúru niektorého príkazu a jeho syntax, vždy môžeme použiť nápoveď v súbore Maple help jednoducho umiestnením otáznika (?) bezprostredne za neznámym príkazom a stlačením klávesu Enter. Budeme teraz riešiť rovnicu (1) a pokúsime sa získať jej všeobecné riešenie.

> dsolve(ODE1,y(x));

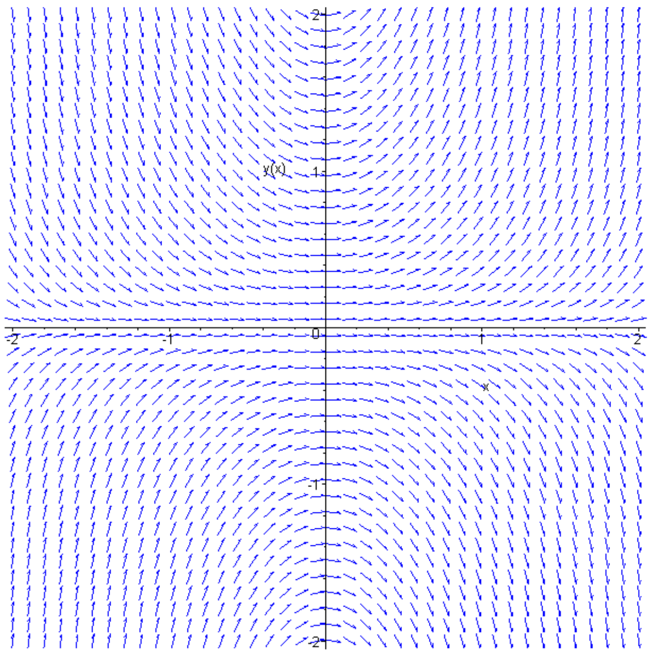
$$y(x)= C1\ e^{x2}$$

Všeobecné riešenie rovnice (1) obsahuje znak "C1", čo je zápis, ktorým systém Maple reprezentuje ľubovoľnú konštantu. V komplikovanejších prípadoch sa táto konštanta môže nachádzať zapísaná na konci výrazu, ku ktorému sa vzťahuje.

Môžeme tiež nakresliť integrálne krivky, ktoré sú grafmi všeobecného riešenia. Smerové pole integrálnych kriviek riešenia rovnice (1) získame použitím nasledujúceho príkazu.

> dfieldplot(ODE1,y(x),x=-2..2,y=-2..2,color=blue,scaling=constrained,

> dirgrid=[40,40]);



Prvým parametrom v zátvorkách je diferenciálna rovnica ODE1. Druhým parametrom je názov neznámej funkcie s uvedenou premennou *y*(*x*). Tretím a štvrtým parametrom sú hraničné hodnoty pre nezávisle a závisle premenné: $x = -2 .. 2$, $y = -2 .. 2$. Ostatné parametre sú voliteľné atribúty vlastnej kresby a môžu byť aj vynechané, systém ich nahradí implicitne nastavenými hodnotami. Pri kresbe smerového poľa je vhodné používať vždy nastavenie “scaling = constrained”, pretože v opačnom prípade môže kresba pôsobiť zavádzajúco, vzhľadom na rôznu mierku na súradnicových osiach x a y, ktorá spôsobí deformáciu smerových čiar.

Partikulárne riešenie ODR prvého rádu

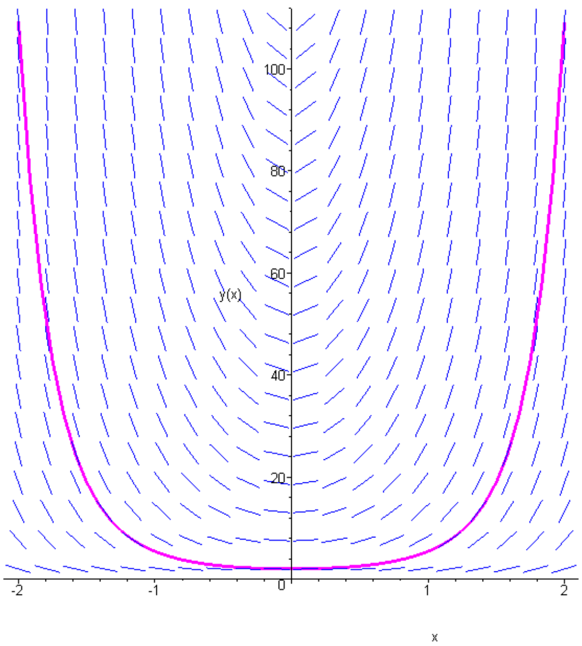
Vezmeme do úvahy začiatočnú podmienku a pomocou systému Maple nájdeme partikulárne riešenie vyhovujúce tejto podmienke. Riešenie ODR s danou začiatočnou podmienkou tiež vykonáva príkaz dsolve. Použijeme teda podmienku uvedenú v rovnici (1) a zapíšeme ju do príkazu.

```
> dsolve({ODE1,y(0)=2},y(x));
```

$$y(x) = 2\, e^{x^2}$$

Ak chceme nakresliť integrálnu krivku partikulárneho riešenia, použijeme príkaz DEplot. Nakreslí smerové pole a partikulárne riešenie vyhovujúce danej začiatočnej podmienke.

```
> DEplot(ODE1,y(x),-2..2,[y(0)=2],linecolor=magenta,color=blue, > arrows=LINE);
```



Ak si neželáme kresbu smerového poľa spolu s partikulárnym riešením, v príkaze DEplot použijeme voľbu “arrows=NONE”.

Riešenie ODR druhého rádu

Budeme riešiť nasledujúcu homogénnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientmi

$$y'' + 2y' + 10y = 0.$$

Táto rovnica je homogénna, pretože všetky výrazy, ktoré obsahujú neznámu funkciu *y* a jej derivácie vystupujú na ľavej strane rovnice a pravá strana rovnice je nula. Zapíšeme danú rovnicu v systéme Maple. Balík príkazov "DEtools" a "plots" budeme potrebovať aj pri riešení ODR druhého rádu, preto začneme podobne, ako v prípade ODR prvého rádu.

```
> eq1 := diff(y(t),t,t) + 2*diff(y(t),t) + 10*y(t) = 0;
```

$$eq1 := \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) + 2\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + 10\, y(t) = 0$$

Spomeňme si, že diff(y(t),t,t) dáva druhú deriváciu funkcie y(t). Na riešenie diferenciálnej rovnice opäť použijeme príkaz dsolve. Prvým argument je daná diferenciálna rovnica (eq1) a druhým je hľadaná neznáma funkcia (y(t)). Príkaz dsolve vráti riešenie v tvare "unknown variable = solution". Ak chceme zobraziť iba samotné riešenie, bez jeho priradeného názvu, použijeme príkaz rhs a zobrazí a len praví strana príkazového riadku. Riešenie je uložené v premennej "sol1".

```
> sol1 := rhs(dsolve(eq1,y(t)));
```

$$sol1 := C1\, e^{-t} \sin(3t) + C2\, e^{-t} \cos(3t)$$

Označenia " *C*1" a" *C*2" predstavujú zápis ľubovoľných konštánt v systéme Maple.

Riešenie ODR druhého rádu so začiatočnými podmienkami

Ďalším krokom bude riešenie ODR druhého rádu s danými začiatočnými podmienkami. Každá ODR druhého rádu bude mať dve začiatočné podmienky. Vyriešime pôvodnú rovnicu s nasledujúcimi začiatočnými podmienkami:

$$y'' + 2y + 10y = 0;\ y(0) = 3;\ y'(0) = -5;$$

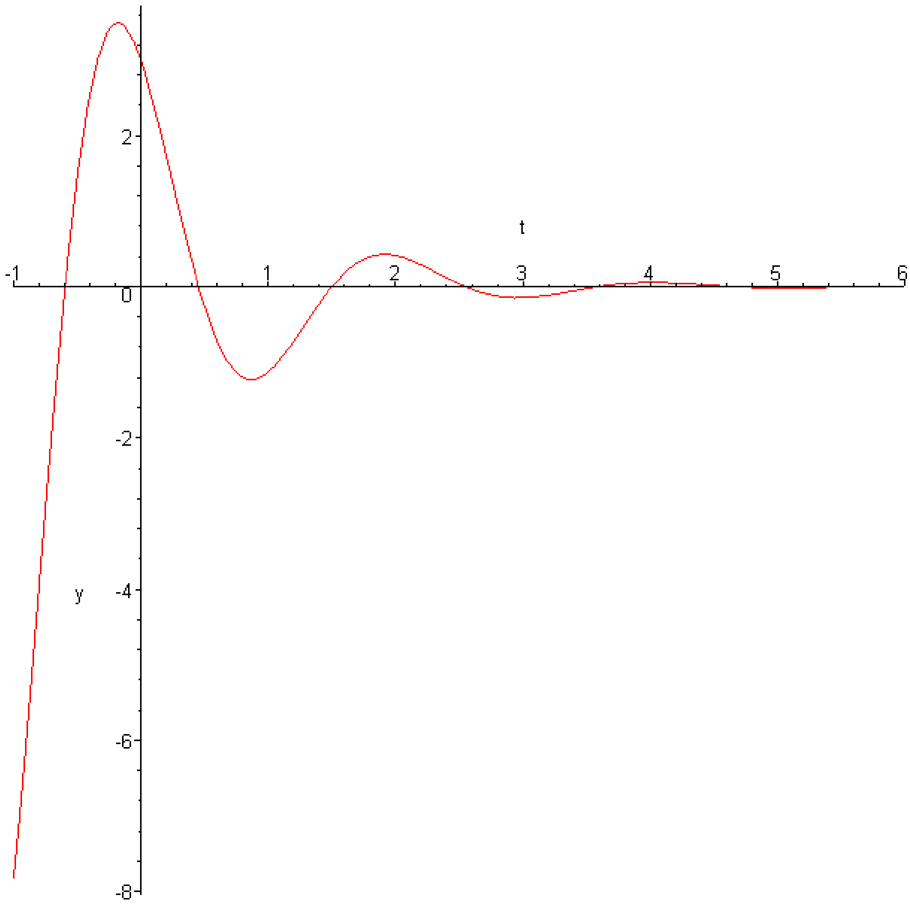
Použijeme príkaz dsolve a uvedieme v ňom začiatočné podmienky podobne, ako pri riešení ODR prvého rádu. Výsledok uložíme do premennej sol2.

> sol2 := rhs(dsolve({eq1,y(0)=3,D(y)(0)=-5},y(t)));

$$sol2 := -(2/3)e^{-t}\ \sin(3t) + 3\ e^{-t}\ \cos(3t)$$

Získané presné riešenie môžeme opäť nakresliť, aby sme lepšie pochopili, aký priebeh má získané riešenie rovnice. Použijeme známy príkaz plot a nakreslíme graf funkcie sol2.

> plot(sol2,t=-1..6,labels=["t","y"]);



Nehomogénne ODR druhého rádu so začiatočnými podmienkami

Pozrime sa teraz na to, ako by sme vyriešili obyčajnú nehomogénnu rovnicu druhého rádu so začiatočnými podmienkami Uvažujme nasledujúcu úlohu:

$$y'' + y + y = t^2 \cos(2t);\ y(0) = 0;\ y'(0) = 2:$$

Najprv sa pokúsime vyriešiť danú rovnicu bez ohľadu na začiatočné podmienky, teda nájdeme jej všeobecné riešenie. Novú diferenciálnu rovnicu označíme eq2.

> eq2 := diff(y(t),t,t) + diff(y(t),t) + y(t) = t^2*cos(2*t);

d^2 d

$$eq1 := \left(\frac{}{dt^2}\, y(\mathrm{t})\right) + \left(\frac{}{dt}\, y(\mathrm{t})\right) + y(t) = t^2 \cos(2\, t)$$

Rovnicu môžeme opäť riešiť pomocou príkazu dsolve. Riešenie označíme sol3.

> sol3 := rhs(dsolve(eq2,y(t)));

$$sol3 := e^{(-t/2)} \sin(\sqrt{3}\; t/2)\; C2 + e^{(-t/2)} \cos(\sqrt{3}\; t/2)\; C1 +$$

$$(1/2197\,)(338\; t^2 + 832\; t - 1212) \sin(2\; t) + (1/2197) \cos(2\; t)\; (336 - 507\; t^2 + 1118t)$$

Toto riešenie je už zložitejšie, v dôsledku nehomogenity danej rovnice, teda vplyvom nenulového výrazu nachádzajúceho sa na pravej strane rovnice. Vyriešime aj úlohu so začiatočnými podmienkami. Opäť použijeme známy príkaz dsolve a riešenie označíme sol4.

> sol4 := rhs(dsolve(*f*eq2,y(0)=0,D(y)(0)=2*g*,y(t)));

$$sol4 := (3688/2197)\; e^{(-t/2)} \sin(\sqrt{3}\; t/2)\; \sqrt{3} - (336/2197)\; e^{(-t/2)} \cos(\sqrt{3}\; t/2)\; C1 +$$

$$(1/2197)\; (338\; t^2 + 832\; t - 1212) \sin(2\; t) + (1/2197) \cos(2\; t)\; (336 - 507\; t^2 + 1118\; t)$$

Riešenie je komplikovaný výraz aj pri použití začiatočných podmienok, preto bude potrebné nakresliť danú integrálnu krivku , ak chceme zistiť podrobnosti o priebehu riešenia.

> plot(sol4,t=0..18,labels=["t","y"]);