

Maple: Derivácie a kritické body

Úvod

Vieme, že systém Maple dokáže celkom jednoducho vykonávať symbolické algebrické výpočty. Je preto ideálnym softvérom riešením na vykonávanie symbolických výpočtov diferenciálneho počtu. V tejto kapitole ukážeme, ako sa dá systém Maple použiť pri hľadaní derivácie funkcie, určovaní kritických bodov funkcie, ak existujú, a pomôcť pri klasifikácii kritických bodov funkcie.

Výpočet derivácie funkcie

Definujme funkciu f ako

```
> f := x^3*(x^2-1);
```

$$f := x^3(x^2 - 1)$$

Deriváciu funkcie vypočítame pomocou príkazu `diff`. Viac o príkaze `diff` a o jeho korektnom použití sa môžeme dozvedieť v nápovede - Maple help, ktorá je súčasťou systému. Pri hľadaní príkazu v súbore Maple help file stačí napísať otáznik ihneď (bez medzere) za daným príkazom a stlačením klávesu Enter. Napríklad:

```
> ?diff
```

Odozva sa objaví v novom okne, kde je uvedený správny zápis príkazu spolu s niekoľkými príkladmi jeho použitia.

Príkaz `diff` má niekoľko parametrov, pomocou týchto sa identifikuje funkcia, ktorú má systém derivovať a tiež sa špecifikuje premenná, vzhľadom na ktorú sa má daná funkcia derivovať. Ak chceme derivovať funkciu f , ktorá bola vyššie definovaná, vzhľadom na premennú x , príkaz zapíšeme v tvare

```
> diff(f,x);
```

$$3x^2(x^2 - 1) + 2x^4$$

Druhú deriváciu funkcie f môžeme vypočítať dvoma spôsobmi. Prvou možnosťou je priradiť meno, napr. g , prvej derivácii funkcii, ktorá je výstupom príkazu `diff(g,x)`, ako ukazuje nasledujúci príklad;

```
> g:=diff(f,x);
```

$$g := 3x^2(x^2 - 1) + 2x^4$$

> diff(g,x);

$$6x(x^2 - 1) + 14x$$

Druhou možnosťou je priamy výpočet druhej derivácie funkcie príkazom systému Maple, ktorý nájde druhú deriváciu funkcie **f** tak, že ju dvakrát derivuje.

> diff(f,x,x);

$$6x(x^2 - 1) + 14x^3$$

Vypočítať môžeme deriváciu ľubovoľného rádu. Príkaz systému Maple pre výpočet 4-tej derivácie je nasledujúci:

> diff(f,x\$4);

$$120x$$

Porovnaním výstupu s výstupom príkazu **diff(f,x,x,x,x);** sa presvedčíme, že výsledok je rovnaký. Použitie zápisu **x\$4** je rýchlejšie, pretože vyžaduje zápis menšieho počtu znakov, a tento zápis je aj syntakticky výhodnejší, pretože sa v ňom dá jednoducho zmeniť požadovaný rád vypočítavanej derivácie.

Systém Maple jednoducho vypočíta aj derivácie funkcií viac premenných. V tomto prípade je veľmi dôležité presne špecifikovať premennú, vzhľadom na ktorú sa má daná funkcia derivovať.

> h := 3*x*y^2*(x^2-4*y);

$$h := 3xy^2(x^2 - 4y)$$

> diff(h,x);

$$3y^2(x^2 - 4y) + 6x^2y^2$$

> diff(h,y);

$$6xy(x^2 - 4y) - 12xy^2$$

Výpočet kritických bodov funkcie

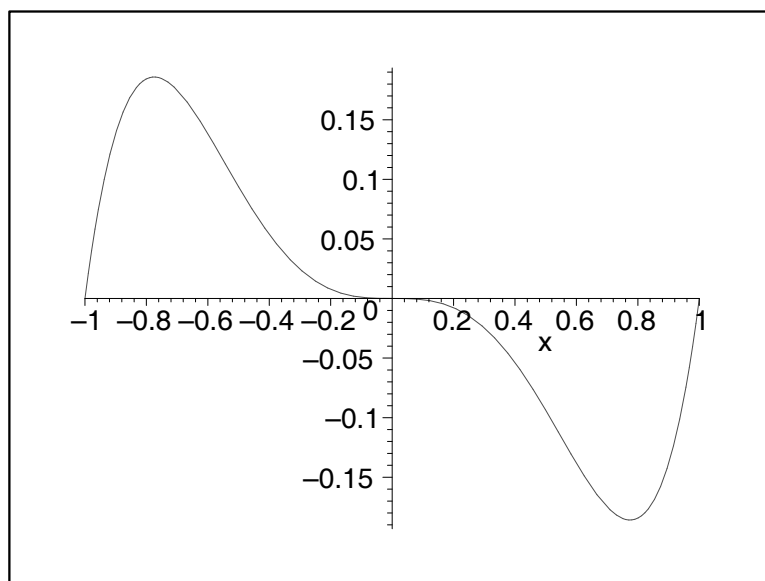
Kritickým bodom funkcie je bod z oboru, v ktorom funkcia nie je diferencovateľná. To znamená, že spád grafu funkcie v danom bode má hodnotu nula. Pred výpočtom kritických bodov funkcie je výhodné nakresliť graf funkcie, aby sme mohli približne odhadnúť hodnoty prípadných kritických bodov. Použijeme funkciu **f**, ktorá bola definovaná v predchádzajúcej časti

```
> f := x^3*(x^2-1);
```

$$f := x^3 (x^2 - 1)$$

Kresbu grafu funkcie v systéme Maple zabezpečíme príkazom **plot**. Príkaz má dva parametre: na prvom mieste je uvedená funkcia, ktorej graf chceme nakresliť, druhý parameter je interval pre premennú funkcie, nad ktorým bude graf danej funkcie nakreslený. Kresba grafu funkcie **f** na intervale $[-1, +1]$ definujeme nasledovne:

```
> plot(f,x=-1..1);
```



Obrázok 1: Graf funkcie $y = x^3 (x^2 - 1)$ na intervale medzi -1 a +1.

Z grafu funkcie odhadneme, že existujú tri body, v ktorých by bola dotyčnica grafu rovnobežná so súradnicovou osou x :

1. Bod v intervale $(-1, 0)$, ktorý je v okolí bodu $x = -0.75$.
2. Bod $x = 0$.
3. Bod v intervale $(0, 1)$, ktorý je v okolí bodu $x = 0.75$.

Ak chceme presne vypočítať kritické body, derivujeme funkciu a potom nájdeme riešenie rovnice, v ktorej sa hodnota derivácie rovná nule. Derivácii funkcie **f** priradíme označenie **df**

```
> df := diff(f,x);
```

$$df := 3x^2(x^2 - 1) + 2x^4$$

Riešením rovnice, v ktorej sa **df** rovná nule, pomocou príkazu **solve** dostaneme hľadané kritické body. Systém Maple implicitne zapíše hodnoty kritických bodov ako

zlomky. Ak chceme výsledok skonvertovať do tvaru desatinného čísla, môžeme použiť príkaz **evalf**:

```
> cp := evalf(solve(df=0,x));
```

```
cp := 0., 0., 0.7745966692, -0.7745966692
```

Systém Maple udáva štyri kritické body ako riešenie rovnice, je však zrejmé, že dva z nich sú zhodné, je to začiatok súradnicovej sústavy. V každom z týchto bodov vypočítame hodnotu funkcie **f**. Označenie **cp** sa vzťahuje na všetky štyri hodnoty vypočítané systémom Maple, pričom každé jednotlivé riešenie sa dá získať použitím hranatých zátvoriek, t.j. **cp[1]** vráti hodnotu prvého kritického bodu v riešení označenom spoločným názvom **cp**, t.j. 0.

```
> evalf( subs(x=cp[1], f) );
```

```
-0
```

Súradnice kritického bodu na grafe funkcie sú (0, 0). **cp[2]** udáva ten istý výsledok, nebudeme ho teda v ďalšom uvažovať. Kritické hodnoty funkcie v bodoch **cp[3]** a **cp[4]** vypočítame podobným spôsobom.

```
> evalf( subs(x=cp[3],f) );
```

```
-0.1859032006
```

```
> evalf( subs(x=cp[4],f) );
```

```
0.1859032006
```

Súradnice ďalších dvoch kritických bodov na grafe funkcie sú (0.7745966692, -0.1859032006) a (-0.7745966692, 0.1859032006).

Potrebujeme zistiť, či sa v daných kritických bodoch nachádza lokálne maximum, lokálne minimum, alebo inflexný bod funkcie. Na to potrebujeme nájsť druhú deriváciu funkcie, a ak existuje, určiť jej hodnotu v kritických bodoch.

Ak je funkcia f dvakrát diferencovateľná v okolí bodu x , v ktorom je $f'(x) = 0$, potom

- ak $f''(x) < 0$, funkcia f má v bode x lokálne maximum,
- ak $f''(x) > 0$, funkcia f má v bode x lokálne minimum,
- ak $f''(x) = 0$, bod x môže (ale nemusí byť) inflexným bodom funkcie.

Ak sa $f''(x) = 0$, potom je potrebné vyhodnotiť, aké hodnoty nadobúda funkcia $f'(x)$ v blízkom okolí kritického bodu, teda v jeho ľavom a v pravom okolí. Ak majú tieto hodnoty opačné znamienka, analyzovaný bod je inflexným bodom funkcie.

Potrebuje teda vypočítať druhú deriváciu funkcie f a potom určiť jej hodnotu v každom z kritických bodov.

```
> d2f := diff(df,x);
```

$$d2f := 6x(x^2 - 1) + 14x^3$$
$$-4.647580014$$

Vypočítame druhú deriváciu v kritickom bode $cp[1]$, t.j. $x = 0$.

```
> evalf(subs(x=cp[1],d2f));
```

0.

Potrebuje teda zistiť hodnotu druhej derivácie funkcie f'' v dvoch bodoch z okolia bodu $x = 0$. Zvolíme si body $x = -0.15$ a $x = +0.15$.

```
> evalf(subs(x=0.15,d2f));
```

-0.832500

```
> evalf(subs(x=-0.15,d2f));
```

0.832500

Pretože znamienka týchto dvoch hodnôt sú rôzne, bod $x = 0$ je inflexným bodom funkcie. Vypočítame hodnotu druhej derivácie funkcie v kritickom bode $cp[3]$, t.j. v bode $x = 0.7745966692$.

```
> evalf(subs(x=cp[3],d2f));
```

4.647580014

Hodnota druhej derivácie je kladná, preto v kritickom bode $x = 0.7745966692$ funkcia nadobúda svoje lokálne minimum. Napokon určíme hodnotu druhej derivácie funkcie v kritickom bode $cp[4]$, t.j. $x = -0.7745966692$.

```
> evalf(subs(x=cp[4],d2f));
```

-4.647580014

Hodnota druhej derivácie je záporná, v kritickom bode $x = -0.7745966692$ funkcia nadobúda lokálne maximum. Určili sme tak všetky kritické body danej funkcie.