Rozdelenia v teórii spoľahlivosti

V úlohách teórie spoľahlivosti, teórie hromadnej obsluhy alebo teórie obnovy veľmi často používame, ako vhodný model riešenia, exponenciálne a Weibullovo rozdelenie.

Exponenciálne rozdelenie

Exponenciálne rozdelenie obyčajne slúži ako vhodný model pre výpočet pravdepodobnosti životnosti výrobku, doba čakania na udalosť a pod. Využíva sa v teórii hromadnej obsluhy.

Exponenciálne rozdelenie s parametrami A a δ, $-\infty < A < \infty$, $\delta > 0$, má náhodná premenná X, ak jej hustota rozdelenia pravdepodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}\exp\left(-\frac{x-A}{\delta}\right), & x > A \\ 0 & \mathrm{x} \le \mathrm{A} \end{cases}$$

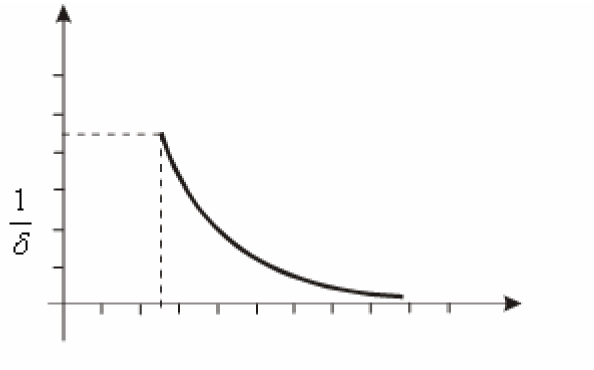
a označujeme ho $X \sim E(A,\delta)$

Stredná hodnota a rozptyl tohto rozdelenia je $E(X) = A + \delta$ a $D(X) = \delta^2$.

Náhodná premenná

$$Y = \frac{X - A}{\delta}$$

má potom normované exponenciálne rozdelenie s parametrami $A = 0$, $\delta = 1$, čo zapisujeme $Y \sim E(0,1)$.



Obr.1 Hustota exponenciálneho rozdelenia

Exponenciálne rozdelenie dobre opisuje rozdelenie pravdepodobnosti doby životnosti zariadenia, u ktorého prichádza k poruche z celkom náhodných príčin a nie v dôsledku mechanického opotrebenia alebo únavy materiálu. Prax potvrdzuje, že exponenciálne rozdelenie majú doby životnosti napr. elektronických prvkov rôznych zariadení, doby čakania na udalosť a pod. Využíva sa v teórii hromadnej obsluhy.

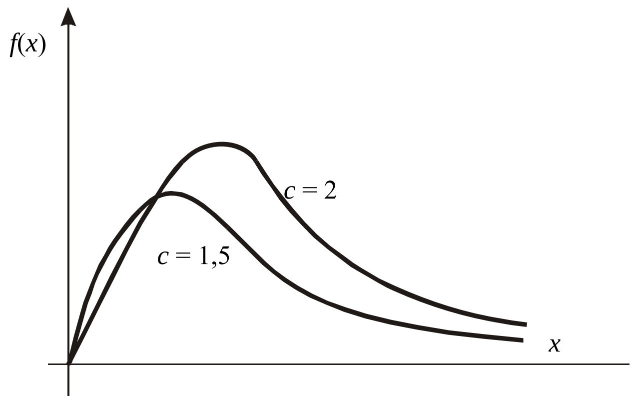
Weibullovo rozdelenie

Tam, kde nevyhovuje exponenciálne rozdelenie, sa používa Weibullovo rozdelenie.

Náhodná premenná X má Weibulovo rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami δ a c, pričom $\delta > 0$, $c > 0$, ak má hustotu pravdepodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c\,x^{c-1}}{\delta^c} \exp\left[-\left(\dfrac{x}{\delta} \right)^c \right] & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

a označujeme ho $X \sim W(\delta, c)$.



Obr. 2 Hustota pravdepodobnosti Weibullovho rozdelenia pre c=1,5 a c=2

Stredná hodnota a rozptyl tohto rozdelenia sú

$$E(X) = \Gamma\left(\frac{1}{c} + 1 \right)\delta \quad \text{a} \quad D(X) = \left[\Gamma\left(\frac{2}{c} + 1 \right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{c} + 1 \right) \right]\delta^2$$

Weibulovo rozdelenie majú väčšinou doby životnosti X nejakého zariadenia, pričom pre parameter c platí:

ak $c > 1$ ide o model pre životnosť zariadenia, ktoré podlieha fyzickému opotrebovaniu alebo

únave,

ak $c < 1$ ide o model pre životnosť zariadenia, u ktorého dochádza k poruchám v dôsledku

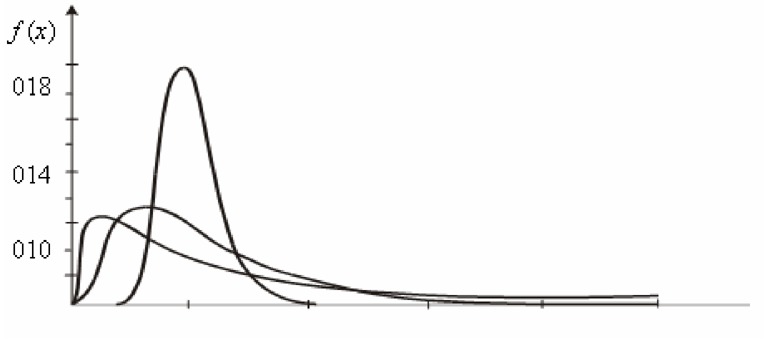
chýb, a nie kvôli opotrebovaniu.

Logaritmicko-normálne rozdelenie

Logaritmicko-normálne rozdelenie sa používa často na modelovanie ekonomických veličín, stretávame sa s ním aj v modeloch antropometrických dát, pri opise veľkosti častíc disperzných fáz kovových materiálov alebo veľkosti častíc sypkých materiálov alebo v teórii spoľahlivosti.

Náhodná premenná X má logaritmicko-normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2, pričom $\mu \in R$, $\sigma > 0$, ak jej hustota pravdepodobnosti sa rovná

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



Obr. 3 Vplyv parametra σ na tvar funkcie hustoty pravdepodobnosti pri logaritmicko–normálnom rozdelení

Logaritmicko-normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2 označujeme $LN(\mu, \sigma^2)$.

Majme náhodnú premennú $Y = \ln X$, kde $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$, potom sa dá dokázať, že $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Odtiaľ pochádza názov logaritmicko-normálne rozdelenie.

Pre distribučnú funkciu $F(x)$ tohto rozdelenia platí

$$F(x) = P(\ln X \leq \ln x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Pre strednú hodnotu a rozptyl tohto rozdelenia platí

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad \text{a} \quad D(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)\left(\exp(\sigma^2) - 1\right)$$

Rovnomerné rozdelenie

Rovnomerné rozdelenie spojitej náhodnej premennej je analogické rovnomernému rozdeleniu diskrétnej náhodnej premennej.

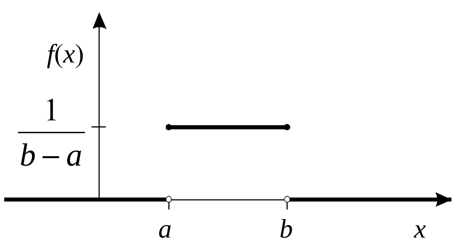
Náhodná premenná X má rovnomerné rozdelenie na intervale $[a,b]$, ak nadobúda hodnoty $x \in [a,b]$ a má hustotu

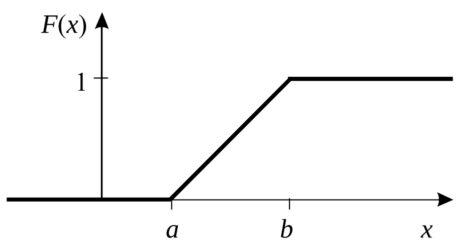
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{pre } x \in [a,b] \\ 0 & \text{pre } x \notin [a,b] \end{cases}$$

kde $a,b \in R$. Označujeme ho ako $X \sim R(a,b)$.

Distribučná funkcia má tvar

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & \text{pre } x \le 0 \end{cases}$$





Obr. 4 Hustota rozdelenia $R(a,b)$ Distribučná funkcia rozdelenia $R(a,b)$

Stredná hodnota a rozptyl tohto rozdelenia je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}$$

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2\, f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Poznámka. Názov rovnomerné rozdelenie sa používa preto, lebo pravdepodobnosť toho, že príslušná náhodná premenná nadobúda hodnotu z intervalu dĺžky $\mathrm{d}x$, je úmerná len dĺžke tohto intervalu a nezávisí od umiestnenia vo vnútri celého intervalu $[a,b]$.