Rozdelenia odvodené z normálneho

Mimoriadny význam pri analýze štatistických údajov, získaných náhodným výberom, majú spojité rozdelenia: chí-kvadrát rozdelenie, *t*-rozdelenie a *F*-rozdelenie. Sú odvodené z normálneho rozdelenia a používajú sa pri konštruovaní intervalových odhadov a testovaní hypotéz.

χ^2-rozdelenie (Pearsonovo)

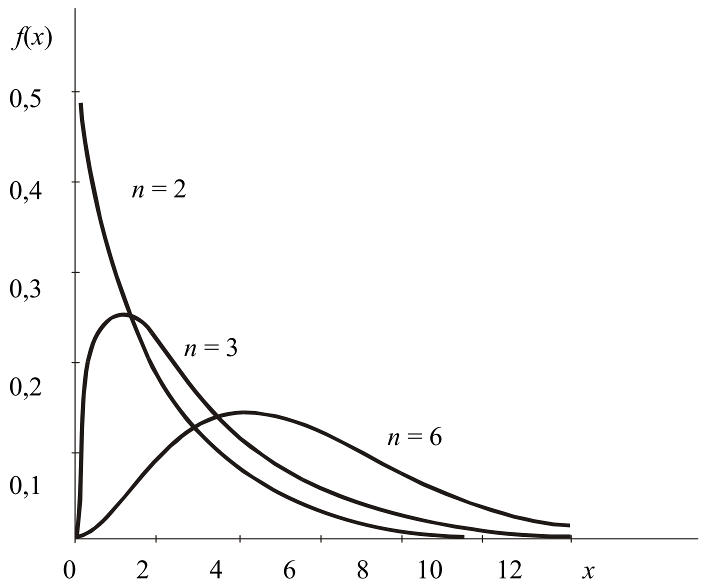
χ^2-rozdelenie (chí-kvadrát) je jedno z veľmi dôležitých rozdelení, ktoré sa používa najmä pri úsudkoch o rozptyloch.

Náhodná premenná X má χ^2-rozdelenie s jediným parametrom n (počet stupňov voľnosti), ak nadobúda hodnoty $x \in [0, \infty)$ a má hustotu rozdelenia pravdepodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & x \in [0, \infty) \\ 0 & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

kde $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ pre $n > 0$.

Pre strednú hodnotu a rozptyl tohto rozdelenia platí: $E(X) = n$, $D(X) = 2n$.



Obr. 1 Hustota pravdepodobnosti χ^2 – rozdelenia pre n=2, n=3 a n=6

Toto rozdelenie je odvodené z normálneho, lebo ak zoberieme nezávislé náhodné premenné $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ s normovaným normálnym rozdelením, t. j. $Y_i \sim N(0,1)$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, tak náhodná premenná

$$Y = Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2$$

má χ^2-rozdelenie (rozdelenie chí-kvadrát) so stupňami voľnosti n, čo zapíšeme

$$Y = Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2 \sim \chi^2(n)$$

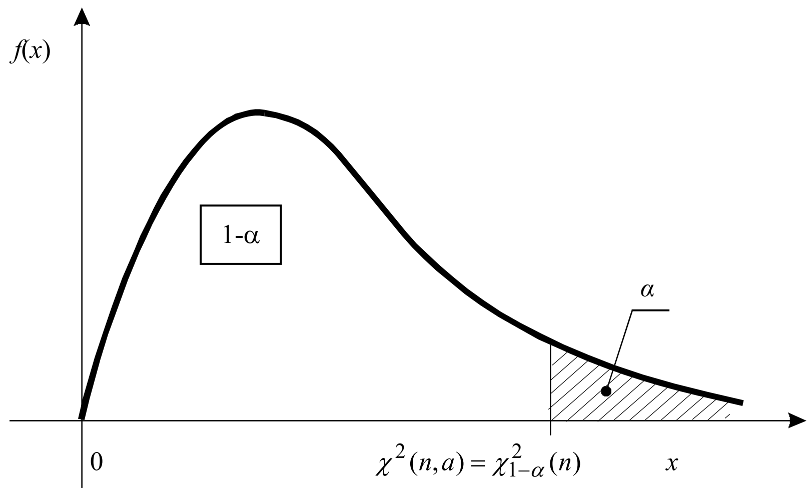
Pre praktické potreby boli tabelované kritické hodnoty $\chi^2(n,\alpha)$ a kvantily $\chi_p^2(n)$ tohto rozdelenia.

Kritická hodnota $\chi^2(n,\alpha)$

Kritická hodnota $\chi^2(n,\alpha)$ je definovaná vzťahom

$$P\left(Y > \chi^2(n,\alpha)\right) = \alpha$$

Kritická hodnota odsekáva na pravej strane plochu ohraničenú grafom funkcie hustoty rozdelenia chí-kvadrát a osou hodnôt premennej o veľkosti α. Najčastejšie používané hodnoty α sú 0,1 a 0,05.



Obr.2

Kvantil $\chi_p^2(n)$

Pre kvantil $\chi_p^2(n)$ platí:

$$P\left(Y < \chi_p^2(n)\right) = p$$

Kvantil $\chi_p^2(n)$ je hodnota, ktorá odsekne vľavo plochu ohraničenú grafom funkcie hustoty rozdelenia chí-kvadrát a osou hodnôt premennej o veľkosti *p*.

Vzťah medzi kritickou hodnotou a kvantilom

Pre zvolenú hodnotu α platí

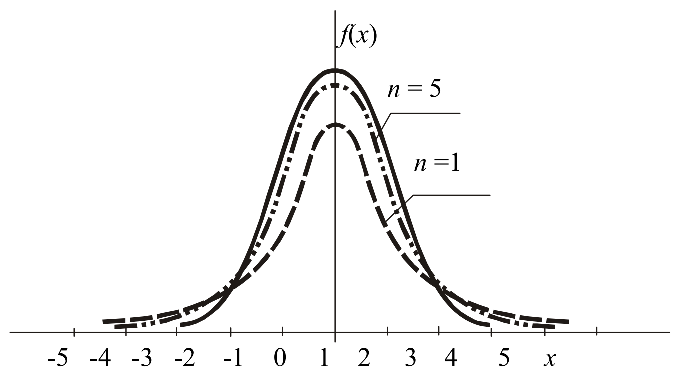
$$\chi^2(n,\alpha) = \chi_{1-\alpha}^2(n)$$

t-rozdelenie (Studentovo)

Studentovo rozdelenie, s *n*- stupňami voľnosti, sa najčastejšie využíva pri štatistických úsudkoch o neznámej strednej hodnote. S rastúcim počtom stupňov voľnosti sa stále viac podobá normálnemu rozdeleniu.

Studentovo rozdelenie s jediným parametrom n, má náhodná premenná *X*, ak pre hodnoty $x \in (-\infty, \infty)$ je hustota rozdelenia pravdepodobnosti v tvare

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathrm{R}, \; n \in \mathrm{N}$$



Obr. 3 Studentovo rozdelenie pre *n*=1, *n*=5 v porovnaní s normálnym rozdelením

Odvodenie z normálneho rozdelenia: ak zoberieme náhodnú premennú *X* s rozdelením $N(0,1)$ a od nej nezávislú náhodnú premennú *Y* s rozdelením $\chi^2(n)$, tak náhodná premenná

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

má *t* rozdelenie pravdepodobnosti s *n* stupňami voľnosti t. j. $T \sim t(n)$.

Pre strednú hodnotu a rozptyl tohto rozdelenia platí:

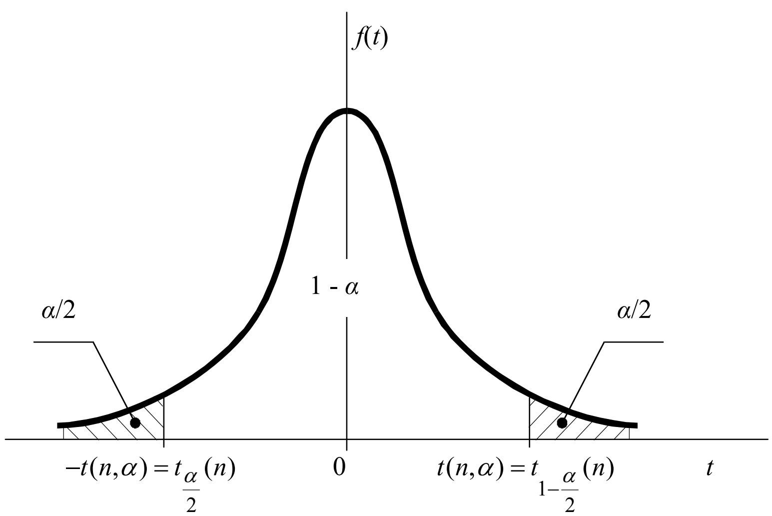
$E(T) = 0$ a $D(T) = \frac{n}{n-2}$.

Kritická hodnota $t(n, \alpha)$

Kritická hodnota $t(n, \alpha)$ tohto rozdelenia je definovaná vzťahom

$$P(-t(n,\alpha) < T < t(n,\alpha)) = P(|T| < t(n,\alpha)) = 1 - \alpha$$

Kritická hodnota odsekáva na obidvoch stranách (vpravo aj vľavo) plochy ohraničené grafom funkcie hustoty *t*-rozdelenia a osou hodnôt premennej o veľkosti $\alpha/2$. Najčastejšie používané hodnoty α sú 0,1 a 0,05.



Obr. 4 Vzťah medzi kritickou hodnotou a kvantilom rozdelenia $t(n)$

Kvantil $t_p(n)$

Z definície kvantilu vyplýva

$$P(T < t_p(n)) = p$$

Kvantil $t_p(n)$ je hodnota, ktorá odsekne vľavo plochu ohraničenú grafom funkcie hustoty *t*-rozdelenia a osou hodnôt premennej o veľkosti *p*.

Vzťah medzi kritickou hodnotou a kvantilom

Pre zvolenú hodnotu α platí

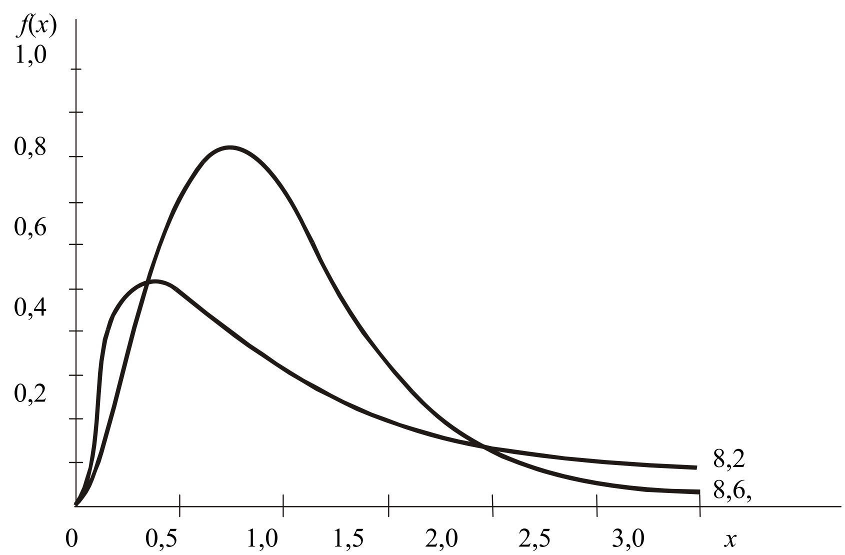
$$t(n,\alpha) = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$$

F-rozdelenie (Fisherovo-Snedecorovo)

Náhodná premenná X má F-rozdelenie pravdepodobnosti so stupňami voľnosti n a m, ak nadobúda hodnoty $x \in (0,\infty)$ a má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)} \left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left(1+\dfrac{n}{m}x\right)^{-\frac{n+m}{2}} & \text{pre } x \in (0,\infty) \\ 0 & \text{pre } x \le 0 \end{cases}$$

kde $n, m \in N$



Obr.5 F–rozdelenie pre n=8, m=2 a pre n=8, m=6

F-rozdelenie je založené na podiely nezávislých premenných s χ^2-rozdelením. Používa sa najmä na porovnávanie rozptylov. Je to dvojparametrické rozdelenie. Parametrami sú stupne voľnosti čitateľa *n* a stupne voľnosti menovateľa *m*.

Ak teda $X \sim \chi^2(n)$ a $Y \sim \chi^2(m)$, potom náhodná premenná

$$F = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$$

má F-rozdelenie pravdepodobnosti so stupňami voľnosti *n* a *m* t. j. $F \sim F(n,m)$.

Pre strednú hodnotu a rozptyl tohto rozdelenia platí:

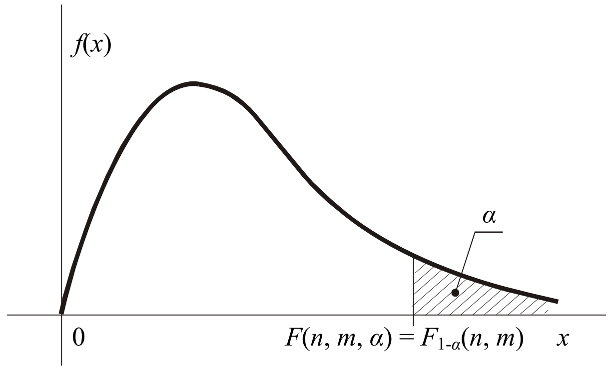
$$E(F) = \frac{m}{m-2} \quad \text{pre} \quad m > 2 \quad \text{a} \quad D(F) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)} \quad \text{pre} \quad m > 4$$

Kritická hodnota $F(n,m,\alpha)$

Kritická hodnota tohto rozdelenia $F(n,m,\alpha)$ je definovaná vzťahom

$$P(F > F(n,m,\alpha)) = \alpha$$

Kritická hodnota odsekáva na pravej strane plochu ohraničenú grafom funkcie hustoty F rozdelenia a osou hodnôt premennej o veľkosti α. Najčastejšie používané hodnoty α sú 0,1 a 0,05.



Obr. 6

Kvantil $F_p(n, m)$

Kvantil tohto rozdelenia $F_p(n, m)$ je definovaný vzťahom

$$P\left(F < F_p(n,\ m)\right) = p$$

Kvantil $F_p(n, m)$ je hodnota, ktorá odsekne na ľavej strane plochu ohraničenú grafom funkcie hustoty F-rozdelenia a osou hodnôt premennej o veľkosti p.

Vzťah medzi kritickou hodnotou a kvantilom

Pre zvolenú hodnotu α platí

$$F(n, m, \alpha) = F_{1-\alpha}(n, m)$$

Poznámka. V štatistických tabuľkách sú tieto kritické hodnoty resp. kvantily uvedené iba pre malé hodnoty α (0,01; 0,05; 0,1 a pod.) alebo iba pre veľké hodnoty α (0,9; 0,95; 0,99 a pod.). Dôležité sú preto vzťahy medzi kritickými hodnotami resp. kvantilmi pre α a pre $1 - \alpha$.

Platí:

$$F(n, m, \alpha) = \frac{1}{F(m, n, 1 - \alpha)}$$

$$F_p(n, m) = \frac{1}{F_{1-p}(m, n)}$$