

Príklady na nezávislosť náhodných udalostí

Príklad 1: Hádzeme 2 hracími kockami. Označme udalosť:

A_1 ... na 1. kocke padne nepárny počet

A_2 ... na 2. kocke padne nepárny počet

A_3 ... na obidvoch kockách padne nepárny počet alebo párný počet

Zistite nezávislosť uvedených udalostí.

Riešenie:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/2$$

$$P(A_1 \cap A_2) = 1/4 = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = 1/4 = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = 1/4 = P(A_2) \cdot P(A_3),$$

z čoho vyplýva, že udalosti A_1, A_2, A_3 sú nezávislé po dvoch.

$$\text{Ale } P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 1/8,$$

z čoho vyplýva, že udalosti ako trojica nie sú vzájomne nezávislé.

V teórii pravdepodobnosti často hľadáme odpoveď na otázku, aká je pravdepodobnosť toho, že

z n náhodných udalostí nastane aspoň jedna náhodná udalosť, t. j. čomu sa rovná P

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)$$

$$a) P \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) -$$

$$\sum_{i,j=1}^n P(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k=1}^n P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + ((-1)^{n-1} P \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)),$$

kde $i < j < k$

- b) ak platí $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre každé $i \neq j$ t.j. náhodné udalosti A_i , $i=1, 2, \dots, n$ sú po dvoch disjunktné, potom z a) vyplýva

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (1.9)$$

- c) Ak sú náhodné udalosti A_i $i=1, 2, 3, \dots, n$, nezávislé ako celok, platí:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n). \quad (\text{D' Morganove pravidlo})$$

Príklad 2. Zistilo sa, že z 10 teplomerov sú 3 teplomery zlé. Aká je pravdepodobnosť toho, že ak z nich náhodne vyberieme 3 teplomery, bude medzi nimi aspoň jeden zlý (náhodná udalosť A)?

Riešenie Označme si náhodnú udalosť

A₁-medzi vybranými teplomermi je práve jeden teplomer zlý,

A₂-medzi vybranými teplomermi sú práve dva teplomery zlé,

A₃- medzi vybranými teplomermi sú práve tri teplomery zlé.

Náhodná udalosť $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Náhodné udalosti sú po dvoch disjunktné, a preto platí:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

Kde pravdepodobnosti $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$ vypočítame nasledovne:

Počet všetkých možných prípadov, ktorými môžeme vybrať tri teplomery z 10, je $n =$

$$C_3(10) = \binom{10}{3} = 120. \text{ Počet } \underline{\text{priaznivých}} \text{ prípadov vypočítame takto: jeden zlý teplomer}$$

môžeme z 3 zlých vybrať $C_1(3) = \binom{3}{1} = 3$ spôsobmi. Tieto prípady treba skombinovať s

tými, koľkými spôsobmi môžeme z $10 - 3 = 7$ teplomerov vybrať 2 dobré teplomery, t.j.

$$C_2(7) = \binom{7}{2} = 21. \text{ Preto } m = C_1(3) \cdot C_2(7) = \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2} = 63.$$

Preto $P(A_1) = 63/120 = 21/40$.

Analogicky $P(A_2) = \frac{C_2(3) \cdot C_1(7)}{C_3(10)} = 7/40$

a $P(A_3) = \frac{C_3(3) \cdot C_0(7)}{C_3(10)} = 1/120$.

Potom $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 21/40 + 7/40 + 1/120 = 17/24$.

Príklad 3 Elektrická sieť obsahuje 5 prvkov, ktoré sú zapojené za sebou a ktoré pracujú nezávisle od seba. Pravdepodobnosť poruchy jednotlivých prvkov v čase t je:
 $P(A_1)=0,1$, $P(A_2)=0,15$, $P(A_3)=0,2$, $P(A_4)=0,1$, $P(A_5)=0,15$. Aká je pravdepodobnosť toho, že v čase t bude prerušená dodávka elektrickej energie?

Riešenie: Náhodné udalosti sú nezávislé (ako celok). Porucha jedného z nich spôsobí prerušenie dodávky elektrickej energie (náhodná udalosť $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_5$).

Preto $P(A) = 1 - (1-0,1)(1-0,15)(1-0,2)(1-0,1)(1-0,15) = 0,53182$

Príklad 4 V sklade je 100 výrobkov, z ktorých je 10 zlých. Vyberme z nich za sebou náhodne 2 výrobky (pričom vytiahnuté výrobky späť do skladu nevraciamy). Aká je pravdepodobnosť, že

- a) prvý výrobok je zlý
- b) oba výrobky sú zlé
- c) ako sa zmení hľadaná pravdepodobnosť, ak prvý vytiahnutý výrobok vrátime späť do skladu?

Riešenie: Nech A_1 , resp. A_2 je náhodná udalosť, ktorá predstavuje vytiahnutie zlého výrobku v prvom, resp. druhom ťahu. Potom

a) $P(A_1)=10/100$

b) Pretože náhodná udalosť $A_1 \cap A_2$ znamená, že oba vytiahnuté výrobky sú zlé platí:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = 10/100 \cdot 9/99 = 0,0091$$

Lebo po vytiahnutí jedného zlého výrobku zostane v sklade $100-1=99$ výrobkov, z ktorých je $10-1=9$ zlých, preto $P(A_2/A_1)=9/99=0,091$.

c) V tomto prípade sú náhodné udalosti A_1 a A_2 stochasticky nezávislé, a preto

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 10/100 \cdot 10/100 = 0,01.$$

Príklad 5: Medzi 20 kovovými tyčami, ktoré sú určené na opracovanie, sú 4 tyče so skrytými chybami materiálu. Vyberme z nich náhodne 4 tyče (výber bez vracania). Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi nebude ani jedna chybná tyč?

Riešenie: Označme náhodnú udalosť A_i ($i = 1,2,3,4$), že pri výbere i -tej tyče nevyberáme chybnú. Potom $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ je náhodná udalosť, že medzi štyrmi vybratými tyčami nebude ani jedna chybná tyč.

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2)P(A_4 / A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 16/20 \cdot 15/19 \cdot 14/18 \cdot$$

$13/17=0,376$, kde jednotlivé podmienené pravdepodobnosti sme dostali analogicky ako v príklade 4.

Príklad 6 : Aparatúra, ktorá pracuje v časovom intervale $\langle 0, t \rangle$, sa skladá z 3 častí, z ktorých každá nezávisle od druhej môže mať poruchu počas času t . Porucha ľubovoľnej časti stroja vyradí aparáturu celkove. Dlhodobou skúsenosťou sa ukázalo, že pravdepodobnosť bezporuchovej práce prvej časti aparatury je 0,8, druhej 0,9 a tretej 0,7. Aká je pravdepodobnosť, že aparátura bude v danom časovom intervale $\langle 0, t \rangle$ pracovať bez poruchy?

Riešenie: Označme si nasledujúce náhodné udalosti

A bezporuchová práca aparatury

A_1, A_2, A_3 – bezporuchová práca prvej, druhej a tretej časti aparatury.

Potom $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, pretože ide o nezávislé náhodné udalosti (ako celok), platí:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504$$

Príklady na precvičenie

2.1 Pri kusových výrobkoch je 8% nepodarkov. Z dobrých výrobkov má 25% prvú akosť. Aká je pravdepodobnosť, že ak zo všetkých výrobkov vytiahneme jeden, bude mať práve prvú akosť?

(B – výrobok je dobrý, A- výrobok má prvú akosť, $P(B) = 0,92$, $P(A/B) = P(A) = 0,25$ a $P(A \cap B) = 0,23$)

2.2 Sústružník obsluhuje tri automatické sústruhy. Pravdepodobnosť, že počas smeny nemá sústruh poruchu sa pri prvom sústruhu rovná 0,95, pri druhom 0,83 a pri treťom 0,91. Aká je pravdepodobnosť, že za smenu ani jeden zo sústruhov nebude mať poruchu? (0,717535)

2.3 Zo závodu vychádzajú súpravy súčiastok balených po 10 kusoch. Do obchodu prišli 3 súpravy. V prvej súprave je 8, v druhej 7 a v tretej 9 súčiastok, ktoré sú bezchybné. Aká je pravdepodobnosť, že ak z každej súpravy kúpime jednu súčiastku, budú všetky 3 súčiastky bezchybné? (0,504)

2.4 Na signalizáciu poruchy výrobnéj linky sa inštalovali dve nezávislé signalizačné zariadenia. Pravdepodobnosť, že pri poruche sa zapojí prvé signalizačné zariadenie je 0,95 a že sa zapojí druhé je 0,9. Aká je pravdepodobnosť, že pri poruche výrobnéj linky obe signalizačné zariadenia nebudú signalizovať poruchu? (0,005)

2.5 Z 12 výrobkov má 8 výrobkov 1. kvalitu a 4 výrobky majú 2. kvalitu. Aká je pravdepodobnosť, že pri náhodnom rozdelení výrobkov do štyroch rovnakých skupín bude každá skupina obsahovať práve 2 výrobky 1. kvality a jeden výrobok 2. kvality? (9/55)

2.6 V televíznom štúdiu majú 3 kamery, ktoré môžu snímať nezávisle od seba. Pre prvú kameru je pravdepodobnosť, že bude snímať v danom okamihu $p_1 = 0,6$ a pre druhú a tretiu kameru je táto pravdepodobnosť rovnaká: $p_2 = p_3 = 0,8$. Aká je pravdepodobnosť, že v danom okamihu bude snímať aspoň jedna kamera? ($P = 1 - (1 - 0,6)(1 - 0,8)(1 - 0,8) = 0,984$).

2.7 Lietadlo bude počas letu zostrelené, ak sa buď vyradia z prevádzky oba motory lietadla, alebo ak je zasiahnutá kabína pilota. Pravdepodobnosť vyradenia prvého motora je p_1 , druhého p_2 a pravdepodobnosť zasiahnutia pilotovej kabíny je p_3 . Aká je pravdepodobnosť zostrelenia lietadla, ak zasiahnutie každého z motorov je nezávisle od seba? ($p = p_1 \cdot p_2 + p_3 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$)

2.8 Pri štartovaní osobného vozidla motor naskočí s pravdepodobnosťou p . Aká je pravdepodobnosť, že

a) motor naskočí až pri druhom štartovaní ($p \cdot (1 - p)$)

b) aby motor naskočil, budeme musieť šartovať najviac dvakrát. ($2 \cdot p - p^2$)