Normálne rozdelenie – príklady

Príklad 1 Meracím prístrojom, ktorý má systematickú chybu $+0{,}14$ sa merala určitá fyzikálna veličina. Náhodné chyby meraní majú rozdelenie $N(0;\,0{,}04)$.

a) Aká je pravdepodobnosť, že chyba meraní v absolútnej hodnote neprekročí 0,5?

b) Ak je meraná hodnota rovná 25,5, koľko percent meraní bude väčších ako 26?

Riešenie

a) Chyby meraní (je zložená zo systematickej chyby a náhodných chýb) budú hodnoty náhodnej premennej X s rozdelním $N(0{,}14;\,0{,}04)$. Máme teda vypočítať

$$P(|X| \le 0{,}5) = P(-0{,}5 \le X \le 0{,}5) = P\left(\frac{-0{,}5-0{,}14}{0{,}2} \le \frac{X-0{,}14}{0{,}2} \le \frac{0{,}5-0{,}14}{0{,}2}\right) =$$

$$P(-3{,}2 \le Y \le 1{,}8) = \Phi(1{,}8) - \Phi(-3{,}2) = \Phi(1{,}8) - [1-\Phi(3{,}2)] = 0{,}963383$$

b) Merané hodnoty náhodnej premennej sú hodnoty náhodnej premennej $Z \approx N(25{,}5+0{,}14;\,0{,}04)$

Máme vypočítať

$$P(Z > 26) = 1 - P(Z < 26) = 1 - P\left(\frac{Z-25{,}64}{0{,}2} < \frac{26-25{,}64}{0{,}2}\right) =$$

$$1 - P(Y < 1{,}8) = 1 - \Phi(1{,}8) = 1 - 0{,}96407 = 0{,}03593$$

Teda asi 3,6 % meraní prekročí hodnotu 26.

Príklad 2 Výrobok je v norme, ak jeho hmotnosť je z intervalu 68 až 69 g. Z dlhodobých pozorovaní je známe, že hmotnosť daných výrobkov má normálne rozdelenie pravdepodobnosti so strednou hodnotou $\mu = 68{,}3$ a disperziou $\sigma^2 = 0{,}04$. Aká je pravdepodobnosť, že vybraný výrobok bude vyhovujúci?

Riešenie

Označme X náhodnú premennú, ktorá predstavuje hmotnosť daných výrobkov. Zaujíma nás pravdepodobnosť

$$P(68 < X < 69) = P\left(\frac{68-68{,}3}{0{,}2} < \frac{X-68{,}3}{0{,}2} < \frac{69-68{,}3}{0{,}2}\right) =$$

$$= P(-1{,}5 < Y < 3{,}5) = \Phi(3{,}5) - \Phi(-1{,}5) = \Phi(3{,}5) - [1-\Phi(1{,}5)] = 0{,}999767 - 1 + 0{,}933193 = 0{,}93296$$

Pričom platí:

$$X \approx N(68{,}3;\,0{,}04) \Rightarrow Y = \frac{X-68{,}3}{0{,}2} \approx N(0{,}1)$$

Vybraný výrobok bude vyhovujúci t.j. v norme, s pravdpodobnosťou 0,93296.

Príklad 3 Je daná normálne rozdelená náhodná premenná X , so strednou hodnotou $E(X)=3$ a $\sqrt{\mathrm{D(X)}}=4$.

a) Aké veľké musí byť číslo z, aby hodnoty premennej X padli do intervalu $(z,4)$ s pravdepodobnosťou aspoň 0,25?

b) Určte medián $x_{0,5}$.

Riešenie

a) Máme X s rozdelením $N(3,16)$. Chceme vypočítať pre aké číslo z platí:

$$P(z<X<4)\geq 0{,}25$$

Počítajme:

$$P(z<X<4)=\int_z^4 \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-3)^2}{32}\right)dx=F(4)-F(z)=\Phi\left(\frac{4-3}{4}\right)-\Phi\left(\frac{z-3}{4}\right)=$$

$$=\Phi(0{,}25)-\Phi\left(\frac{z-3}{4}\right)\geq 0{,}25$$

Z tabuľky určíme pre $x=0{,}25$ hodnotu distribučnej funkcie $\Phi(0{,}25)=0{,}59871$

Po dosadení do nerovnice dostaneme

$$0{,}59871-\Phi\left(\frac{z-3}{4}\right)\geq 0{,}25\Rightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{z-3}{4}\right)\leq 0{,}34871=\Phi(x)$$

a z vlastnosti rastúcosti distribučnej funkcie vyplýva

$$\frac{z-3}{4}\leq x\Rightarrow z\leq 4x+3$$

$$z\leq 4\cdot(-0{,}39)+3=1{,}44$$

Hodnotu $x=-0{,}39$ sme získali nasledovným postupom:

V štatistických tabuľkách sú hodnoty distribučnej funkcie $\Phi(x)$ pre $x\geq 0$, teda začínajú až hodnotou 0,5. Pre hodnoty menšie ako 0,5 (ako v našom prípade) využívame vlastnosť distribučnej funkcie $\Phi(x)$ (neplatí všeobecne pre *F(x)*):

$$\Phi(x)=1-\Phi(-x)$$

Teda

$$0{,}34871=1-\Phi(-x)\Rightarrow\Phi(-x)=0{,}65129$$

túto hodnotu už vieme nájsť v tabuľkách a odpovedá jej hodnota

$$-x=0{,}39\Rightarrow x=-0{,}39$$

b) Medián $x_{0,5}$ je taká hodnota náhodnej premennej X, pre ktorú platí :

$$F(x_{0,5})=P(X\leq x_{0,5})=0{,}5$$

$$F(x_{0,5}) = \Phi\left(\frac{x_{0,5} - \mu}{\sigma}\right) = 0,5$$

Z tabuliek vyplýva, že $\Phi(0) = 0,5 \Rightarrow \frac{x_{0,5} - \mu}{\sigma} = 0 \Rightarrow x_{0,5} = \mu$

Teda v našom prípade $x_{0,5} = 3$.