Náhodný vektor

V praxi veľakrát nestačí popisovať výsledok experimentu len pomocou jednej premennej, ale je nutné uvažovať väčší počet premenných (napríklad zisťujeme dĺžku, hrúbku a hmotnosť nejakej súčiastky). Teda na študovaných objektoch zisťujeme súčasne hodnoty niekoľkých náhodných premenných $X_1, X_2, ..., X_n$, ktoré spolu logicky súvisia. Môžeme ich považovať za zložky n – rozmerného náhodného vektora $(X_1, X_2, ..., X_n)^{\mathrm{T}}$ alebo n-rozmernej náhodnej premennej $(X_1, X_2, ..., X_n)$.)

V tomto prípade existujú tri typy rozdelení: *združené*, *marginálne* a *podmienené*. Uvedené typy budeme prezentovať na dvojrozmernej náhodnej premennej.

Definícia dvojrozmerného rozdelenia

Združené rozdelenie

Nech (X, Y) je dvojrozmerná náhodná premenná, potom jej rozdelenie definujeme pomocou *združenej* (*dvojrozmernej*) *distribučnej funkcie*

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y),$$

ktorá udáva pravdepodobnosť súčasného nastatia dvoch udalostí $\{X \leq x\}$ a $\{Y \leq y\}$.

Vlastnosti združenej distribučnej funkcie

$0 \leq F(x, y) \leq 1$ pre ľubovoľné reálne čísla x a y

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0$$

$$F(\infty, \infty) = \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x, y) = 1$$

$$P(x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

$F(x, y)$ je neklesajúca funkcia vzhľadom k obidvom premenným

Marginálne rozdelenia

Marginálna distribučná funkcia, ktorú odvodíme zo združenej distribučnej funkcie $F(x, y)$, je definovaná pre náhodnú premennú X vzťahom

$$F_1(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = F(x, \infty)$$

a pre náhodnú premennú Y

$$F_2(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq \infty, Y \leq y) = F(\infty, y)$$

kde

$$F(x, \infty) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) \text{ a } F(\infty, y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y)$$

Podmienené rozdelenia

Podmienená distribučná funkcia náhodnej premennej X, za podmienky, že pre náhodnú premennú Y platí $Y = y$, je definovaná vzťahom

$$F(x|y) = P(X \leq x | Y = y)$$

a podmienená distribučná funkcia náhodnej premennej Y, za podmienky, že náhodná premenná $X = x$, je všeobecne definovaná vzťahom

$$F(y|x) = P(Y \leq y | X = x)$$

Spojité a diskrétne rozdelenie dvojrozmernej náhodnej premennej

Diskrétne združené rozdelenie

Združená pravdepodobnostná funkcia

Dvojrozmerná náhodná premenná (X, Y) má *diskrétne združené rozdelenie pravdepodobnosti*, ak nadobúda hodnoty (x_i, y_j) $(i = 1, 2, ..., m\,,\quad j = 1, 2, ..., n)$ s kladnými pravdepodobnosťami

$$p_{ij} = p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

pre ktoré platí

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

Funkcia sa nazýva *združená pravdepodobnostná funkcia*.
Diskrétne dvojrozmerné rozdelenie možno vyjadriť aj vo forme dvojrozmernej tabuľky alebo grafu.

Združená distribučná funkcia

Združená distribučná funkcia (tiež distribučná funkcia dvojrozmernej náhodnej premennej) je definovaná vzťahom

$$F(x, y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} P(X = x_i, Y = y_j)$$

Diskrétne marginálne rozdelenia

Rozdelenie jednej zložky X resp. Y dvojrozmernej náhodnej premennej (X, Y), ktoré získame z jej združeného rozdelenia pravdepodobnosti definovaného v (3.11) a (3.12) nazývame marginálne (okrajové) rozdelenie pravdepodobnosti.

Marginálna pravdepodobnostná funkcia

Marginálnu pravdepodobnostnú funkciu premennej X resp. Y dostaneme z (3.11)

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p\left(x_i, y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$$

$$p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} p\left(x_i, y_j\right) = \sum_{i=1}^{m} P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$$

Marginálnou pravdepodobnostnou funkciou je definované rozdelenie náhodnej premennej X , (prvej zložky dvojrozmernej náhodnej premennej) resp.rozdelenie náhodnej premennej *Y*.

Marginálna distribučná funkcia

Distribučné funkcie, príslušné uvedeným marginálnym rozdeleniam pravdepodobnosti, sú dané vzťahmi

$$F_1(x) = \sum_{x_i \le x} p_{i\bullet} = \sum_{x_i \le x} \sum_{j=1}^{n} p\left(x_i, y_j\right) = \sum_{x_i \le x} \sum_{j=1}^{n} P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$$

$$F_2(y) = \sum_{y_j \le y} p_{\bullet j} = \sum_{y_j \le y} \sum_{i=1}^{m} p\left(x_i, y_j\right) = \sum_{y_j \le y} \sum_{i=1}^{m} P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$$

Marginálnou distribučnou funkciou je definované rozdelenie náhodnej premennej *X,* (prvej zložky dvojrozmernej náhodnej premennej) a marginálnou distribučnou funkciou resp.rozdelenie náhodnej premennej Y (druhej zložky dvojrozmernej náhodnej premennej).

Diskrétne podmienené rozdelenia

Z dvojrozmernej diskrétnej náhodnej premennej (X, Y), ktorá nadobúda hodnoty (x_i, y_j) $(i = 1, 2, ..., m, \; j = 1, 2, ..., n)$ s kladnými pravdepodobnosťami možno získať podmienené rozdelenia.

Podmienené pravdepodobnostné funkcie

Podmienená pravdepodobnostná funkcia náhodnej premennej X za podmienky, že náhodná premenná *Y* nadobudla hodnotu y_j , je definovaná vzťahom

$$p\left(x_i \middle| y_j\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{m} P\left(X = x_i, Y = y_j\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

a podmienená pravdepodobnostná funkcia náhodnej premennej Y ,za podmienky, že náhodná premenná X nadobudla hodnotu x_i, je definovaná vzťahom

$$p\left(y_j \middle| x_i\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(X = x_i\right)} = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(X = x_i, Y = y_j\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

Podmienené distribučné funkcie

Podmienená distribučná funkcia náhodnej premennej X za podmienky, že náhodná premenná Y nadobudla hodnotu y_j , je definovaná vzťahom

$$F_1\left(x \middle| y_j\right) = \sum_{x_i \le x} p\left(x_i \middle| y_j\right) = \frac{\sum\limits_{x_i \le x} P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{m} P\left(X = x_i, Y = y_j\right)} = \frac{\sum\limits_{x_i \le x} p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

a podmienená distribučná funkcia náhodnej premennej Y ,za podmienky, že náhodná premenná X nadobudla hodnotu x_i, je definovaná vzťahom

$$F_2\left(y \middle| x_i\right) = \sum_{x_i \le x} p\left(y_j \middle| x_i\right) = \frac{\sum\limits_{y_j \le y} P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(X = x_i, Y = y_j\right)} = \frac{\sum\limits_{y_j \le y} p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

Spojité združené rozdelenie

Dvojrozmerná náhodná premenná (X, Y) má *spojité združené rozdelenie pravdepodobnosti*, ak existuje nezáporná reálna funkcia dvoch premenných $f(x, y)$ taká, že pre každé reálne x a y sa dá dvojrozmerná distribučná funkcia vyjadriť v tvare

$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \qquad (1.47)$$

pričom platí, že

$$F(\infty,\infty) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F(x,y) = P(X \le \infty, Y \le \infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \text{ pre všetky } (x,y) \text{ kde existuje derivácia}$$

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Funkcia $f(x,y)$ sa nazýva *združená funkcia hustoty*.

Spojité marginálne rozdelenia

Marginálne hustoty

Marginálne hustoty rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X resp. Y sú definované vzťahmi

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \quad \text{resp.} \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

Marginálne distribučné funkcie

Marginálne distribučné funkcie náhodnej premennej X resp. Y sú definované vzťahmi

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Poznámka. Ak je známa združená distribučná funkcia $F(x,y)$ resp. združená hustota pravdepodobnosti $f(x,y)$, vieme vždy nájsť marginálne distribučné funkcie $F_1(x)$, $F_2(y)$ aj marginálne hustoty $f_1(x)$, $f_2(y)$. Opačné tvrdenie neplatí.

Spojité podmienené rozdelenia

Nech (X,Y) je spojitá dvojrozmerná náhodná premenná so združenou hustotou pravdepodobnosti $f(x,y)$ a marginálnymi hustotami $f_1(x)$, $f_2(y)$. Potom rozdelenie jednej premennej, za predpokladu, že druhá premenná nadobudla konkrétnu hodnotu sa nazýva *podmienené rozdelenie.*

Podmienená hustota pravdepodobnosti

Podmienená hustota pravdepodobnosti $f_1(x|y)$ premennej X, za podmienky, že $Y=y$, je daná vzťahom

$$f_1(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \quad \text{pre} \quad f_2(y)>0$$

a podmienená hustota pravdepodobnosti $f_2(y|x)$ premennej Y ,za podmienky, že $X=x$, je daná vzťahom

$$f_2(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)} \quad \text{pre} \quad f_1(x)>0\,.$$

Združenú funkciu hustoty $f(x,y)$ môžeme potom vyjadriť ako súčin marginálnej hustoty $f_1(x)$ resp. $f_2(y)$ s podmienenou hustotou $f_2(y|x)$ resp. $f_1(x|y)$, t. j

$$f(x,y)=f_2(y)f_1(x|y)=f_1(x)f_2(y|x)$$

Podmienená distribučná funkcia

Podmienená distribučná funkcia $F_1(x|y)$ premennej X, za podmienky, že $Y=y$, je daná vzťahom

$$F_1(x|y)=\frac{\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\mathrm{d}x}{f_2(y)} \quad \text{pre} \quad f_2(y)>0\,.$$

Podmienená distribučná funkcia $F_2(y|x)$ premennej Y,za podmienky, že $X = x$, je daná vzťahom

$$F_2(y|x) = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\mathrm{d}y}{f_1(x)} \quad \text{pre} \quad f_1(x) > 0$$

Nezávislosť dvoch náhodných premenných

Nech (X,Y) je dvojrozmerná náhodná premenná, ktorej združená distribučná funkcia je $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$ a marginálne distribučné funkcie sú $F_1(x) = P(X \le x)$ a $F_2(y) = P(Y \le y)$. Nezávislosť dvoch náhodných premenných budeme definovať pomocou nezávislosti dvoch udalostí $\{X \le x\}$ a $\{Y \le y\}$, pre ľubovoľné reálne čísla *x*, *y*.

Nezávislosť náhodných premenných X a Y

Náhodné premenné *X* a *Y* sú nezávislé vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné reálne čísla *x*, *y* platí:

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x) \cdot P(Y \le y)$$

t. j.

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

Diskrétne náhodné premenné *X* a *Y*

Pre diskrétnu dvojrozmernú náhodnú premennú (X,Y), ktorá nadobúda hodnoty (x_i, y_j) ($i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$) s kladnými pravdepodobnosťami $P(X = x_i, Y = y_j)$, sa dá dokázať, že jej zložky sú nezávislé vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné reálne čísla *x*, *y* platí

$$\sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) \cdot \sum_{y_j \le y} P(Y = y_j)$$

čo je ekvivalentné s tým, že združená pravdepodobnostná funkcia sa dá vyjadriť ako súčin marginálnych t. j. pre (x_i, y_j) ($i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$) platí

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

Poznámka. Dajú odvodiť ekvivalentné vzťahy pre nezávislosť:

$p(x|y) = p_1(x)$ a $p(y|x) = p_2(y)$.

Spojité náhodné premenné *X* a *Y*

Pre spojitú dvojrozmernú náhodnú premennú (X, Y) so združenou hustotou pravdepodobnosti $f(x, y)$, marginálnymi hustotami $f_1(x)$ resp. $f_2(y)$ a podmienenými hustotami pravdepodobnosti $f_1(x|y)$ resp. $f_2(y|x)$, sa dá dokázať, že jej zložky *X* a *Y* sú nezávislé vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné reálne čísla *x*, *y* platí

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

čo je ekvivalentné so vzťahmi

$$f_1(x|y) = f_1(x) \quad \text{a} \quad f_2(y|x) = f_2(y)$$

Charakteristiky dvojrozmerného náhodného vektora

Nech náhodné premenné X a Y, ktoré sú zložkami náhodného vektora $(X, Y)^{\mathrm{T}}$, majú stredné hodnoty $E(X) = \mu_x$, $E(Y) = \mu_y$ a rozptyly $D(X) = \sigma_x^2$, $D(Y) = \sigma_y^2$.

Vektor stredných hodnôt

Vektor stredných hodnôt náhodného vektora $(X, Y)^{\mathrm{T}}$ je definovaný ako vektor:

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_x, \mu_y)^{\mathrm{T}}$$

Stredná hodnota a rozptyl funkcie náhodného vektora

Nech funkcia náhodného vektora $(X,Y)^{\mathrm{T}}$ je $h(X,Y)$, čo je jednorozmerná náhodná premenná.

Diskrétny náhodný vektor

Pre diskrétny náhodný vektor $(X,Y)^{\mathrm{T}}$, ktorý nadobúda hodnoty (x_i, y_j) ($i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$) s kladnými pravdepodobnosťami $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ je *stredná hodnota premennej* $h(X,Y)$

$$E(h(X,Y)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h(x_i, y_j) p(x_i, y_j)$$

a *rozptyl premennej* $h(X,Y)$

$$D(h(X,Y)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h^2(x_i, y_j) p(x_i, y_j) - E^2(h(X,Y))$$

Spojitý náhodný vektor

Pre spojitý náhodný vektor $(X,Y)^{\mathrm{T}}$,so združenou hustotou pravdepodobnosti $f(x,y)$, je *stredná hodnota premennej* $h(X,Y)$

$$E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f(x,y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

a *rozptyl premennej* $h(X,Y)$

$$D(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x,y) f(x,y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - E^2(h(X,Y))$$

Podmienené stredné hodnoty

Stredná hodnota podmieneného rozdelenia sa nazýva *podmienená stredná hodnota*.

Diskrétny náhodný vektor

Pre diskrétny náhodný vektor $(X,Y)^{\mathrm{T}}$, ktorý nadobúda hodnoty (x_i, y_j) ($i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$) s kladnými pravdepodobnosťami $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$, je *podmienená stredná hodnota premennej X,* za podmienky $Y = y_j$ rovná

$$E(X|Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i p(x_i|y_j)$$

a *podmienená stredná hodnota premennej Y* za podmienky $X = x_i$

$$E(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j|x_i)$$

Spojitý náhodný vektor

Pre spojitý náhodný vektor $(X,Y)^{\mathrm{T}}$, so združenou hustotou pravdepodobnosti $f(x,y)$, je *podmienená stredná hodnota premennej* X, za podmienky $Y = y$ rovná

$$E(X|y) = E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x|y)\mathrm{d}x$$

a *podmienená stredná hodnota premennej* Y za podmienky, že $X = x$

$$E(Y|x) = E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y|x)\mathrm{d}y$$

Poznámka. Stredná hodnota (3.47) podmieneného rozdelenia premennej X závisí od podmienky (hodnoty premennej Y) a je teda jej funkciou : $E(X|y) = E(X|Y = y) = g_2(y)$. Táto funkcia sa nazýva *regresná funkcia* premennej X vzhľadom k Y a ukazuje priebeh závislosti X od Y. Podobne je definovaná závislosť Y

od X ako *regresná funkcia* premennej Y vzhľadom k X, t. j. $E(Y|x) = E(Y|X = x) = g_1(x)$.

Poznámka. Ak sú premenné X a Y nezávislé, tak $E(X|y) = E(X)$ a $E(Y|x) = E(Y)$.

Podmienené rozptyly

Rozptyl podmieneného rozdelenia sa nazýva *podmienený rozptyl*.

Diskrétny náhodný vektor

Pre diskrétny náhodný vektor $(X, Y)^{\mathrm{T}}$, ktorý nadobúda hodnoty (x_i, y_j) ($i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$) s kladnými pravdepodobnosťami $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ je *podmienený rozptyl premennej X* za podmienky $Y = y_j$

$$D(X|Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} \left[x_i - E(X|Y = y_j)\right]^2 p(x_i|y_j)$$

a *podmienený rozptyl premennej Y* za podmienky $X = x_i$

$$D(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} \left[y_j - E(Y|X = x_i)\right]^2 p(y_j|x_i)$$

Spojitý náhodný vektor

Pre spojitý náhodný vektor $(X, Y)^{\mathrm{T}}$ so združenou hustotou pravdepodobnosti $f(x, y)$, podmienenými hustotami $f_1(x|y)$ a $f_2(y|x)$ je *podmienený rozptyl premennej X* za podmienky $Y = y$

$$D(X|y) = D(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - E(X|Y)\right]^2 f_1(x|y)\,\mathrm{d}x$$

a *podmienený rozptyl premennej* Y ,za podmienky, že $X = x$

$$D(Y|x) = D(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y|X)]^2 f_2(y|x)\,\mathrm{d}y$$

Poznámka. Analogicky ako podmienená stredná hodnota aj podmienený rozptyl premennej X je funkciou hodnoty premennej Y t. j. $D(X|y) = D(X|Y = y) = d_2(y)$. Táto funkcia sa nazýva *skedastická* a jej tvar charakterizuje menlivosť rozptylu premennej X v závislosti od hodnôt y. Podobne je definovaná závislosť podmieneného rozptylu premennej Y od hodnôt premennej X, t. j. $D(Y|x) = D(Y|X = x) = d_1(x)$.

Poznámka. Dôležitú úlohu v teórii pravdepodobnosti a v štatistike hrajú rozdelenia, ktorých podmienené rozptyly nezávisia od podmienky, t. j. majú konštantnú skedastiskú funkciu. Takéto rozdelenia sa nazývajú *homoskedastické*. V opačnom prípade ide o *heteroskedastické rozdelenia.*

Kovariancia

Kovariancia je miera lineárnej závislosti dvoch náhodných premenných X a Y definovaná vzťahom

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

Kovariancia nadobúda hodnoty z intervalu $(-\infty, \infty)$.

Korelačný koeficient

Korelačný koeficient je miera lineárnej závislosti (korelačnej) dvoch náhodných premenných X a Y definovaná vzťahom

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

kde

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)},\ \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

Vlastnosti korelačného koeficienta:

- ρ nadobúda hodnoty z intervalu [-1, 1];
- ak $\rho = 1$, ide o priamu lineárnu (t. j. funkčnú) závislosť;
- ak $\rho = -1$ ide o nepriamu lineárnu (t. j. funkčnú) závislosť;
- ak $\rho = 0$ vieme vo všeobecnosti povedať iba to, že náhodné premenné sú nekorelované .

Poznámka. Pre nezávislé náhodné premenné X a Y platí vždy, že $\rho(X, Y) = 0$. Opačné tvrdenie neplatí všeobecne. Len v prípade dvojrozmerného normálneho rozdelenia náhodného vektora $(X, Y)^{\mathrm{T}}$ platí, že: $\rho(X, Y) = 0$ *vtedy a len vtedy, ak sú náhodné premenné* X a Y *nezávislé*.

Kovariančná matica

Kovariančná matica náhodného vektora $(X, Y)^{\mathrm{T}}$ je definovaná takto:

$$\mathbf{\Sigma} = \left(\sigma_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

kde

$\sigma_{xy} \,(= \sigma_{yx})$ je kovariancia medzi zložkami náhodného vektora;

σ_x^2, σ_y^2 sú rozptyly jednotlivých zložiek náhodného vektora.

Korelačná matica

Korelačná matica náhodného vektora $(X, Y)^{\mathrm{T}}$ je definovaná takto:

$$\left(\rho_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & 1 \end{pmatrix}$$

kde

$\rho_{xy} \,(= \rho_{yx})$ je korelačný koeficient medzi zložkami náhodného vektora.

Vlastnosti stredných hodnôt a rozptylov

Nech $a, b, c, k_i,\ i = 1, 2, ..., n$ sú reálne čísla (konštanty) a nech $X, X_i,\ i = 1, 2, ..., n$ sú spojité náhodné premenné, potom platí:

$$E(aX + b) = aE(X) + b;$$

$$D(aX + b) = a^2 D(X);$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2;$$

$$E(k_1 X_1 + k_2 X_2 + ... + k_n X_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i E(X_i);$$

$$D(k_1 X_1 + k_2 X_2 + ... + k_n X_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 D(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_i k_j \operatorname{cov}(X_i, X_j);$$

$$D(X_1 \pm X_2) = D(X_1) + D(X_2) \pm 2 \cdot \operatorname{cov}(X_1, X_2).$$

Keď okrem vyššie uvedených predpokladov sú náhodné premenné $X_1, X_2, ..., X_n$ aj nezávislé, potom platí:

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot ... \cdot E(X_n);$$

$$D(k_1 X_1 + k_2 X_2 + ... + k_n X_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 D(X_i).$$

Rozdelenie viacrozmernej náhodnej premennej

Združené rozdelenie

Združená distribučná funkcia

Združená distribučná funkcia (tiež distribučná funkcia viacrozmernej náhodnej premennej) je definovaná vzťahom

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathrm{P}\left(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_n \le x_n\right)$$

Táto funkcia vyjadruje pravdepodobnosť súčasného nastatia n udalostí uvedených na pravej strane rovnosti.

Združená funkcia hustoty

Združená funkcia hustoty (nazývaná tiež funkcia hustoty viacrozmernej náhodnej premennej) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ je funkcia, pre ktorú platí

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}...\int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 ... \mathrm{d}x_n$$

Marginálne rozdelenia

Marginálna distribučná funkcia náhodnej premennej X_i

Rozdelenie jednej premennej X_i, ktoré získame zo združeného rozdelenia náhodného vektora $(X_1, X_2, ..., X_n)^{\mathrm{T}}$, sa nazýva *marginálne rozdelenie*. Marginálna distribučná funkcia pre X_i ($i = 1, 2, ..., n$) je definovaná vzťahom

$$F_i(x_i) = P\left(X_1 \le \infty, ..., X_i \le x_i, ..., X_n \le \infty\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{x_i} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 ... \mathrm{d}x_n$$

Marginálna funkcia hustoty náhodnej premennej X_i

Marginálnu hustotu premennej X_i vypočítame tak, že funkciu $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ integrujeme cez všetky premenné, okrem x_i, na ich príslušných definičných oboroch.

Vzájomná nezávislosť zložiek náhodného vektora

Majme teraz *n*-rozmerný náhodný vektor $(X_1, X_2, ..., X_n)^{\mathrm{T}}$. Pre náhodný vektor s viac ako dvomi zložkami, možno okrem nezávislosti dvojíc, definovať aj vzájomnú nezávislosť. Náhodné premenné $X_1, X_2, ..., X_n$ sú vzájomne nezávislé vtedy a len vtedy, ak platí:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) ... f_n(x_n)$$

čo je ekvivalentné s tým, že

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_1(x_1)\, F_2(x_2) ... F_n(x_n)$$

kde

$f_i(x_i)$ resp. $F_i(x_i)$ sú marginálne funkcie hustoty resp. marginálne distribučné funkcie náhodných premenných (meraných veličín) X_i, ($i = 1, 2, ..., n$).

Kovariančná matica

Kovariančná matica náhodného vektora $(X_1, X_2, ..., X_n)^{\mathrm{T}} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ je

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

kde

$\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$ sú kovariancie medzi zložkami náhodného vektora;

$\sigma_{ii} = \text{cov}(X_i, X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú rozptyly jednotlivých zložiek náhodného vektora.

Kovariančná matica je štvorcová a symetrická matica. Keď sú zložky náhodného vektora po dvoch nezávislé alebo aspoň nekorelované, potom kovariančná matica je diagonálna t.j. nediagonálne prvky sú rovné 0. Ak naviac, rozptyly všetkých premenných X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sú rovnaké, t.j. $D(x_i) = \sigma^2$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), potom kovariančná matica náhodného vektora $(X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ má tvar $\mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matica, t. j. diagonálne prvky sú rovné 1 a nediagonálne sú rovné 0.

Charakteristiky lineárnych foriem

Nech k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú reálne čísla, z ktorých aspoň jedno, je rôzne od nuly, t. j. $\sum_{i=1}^{n} k_i^2 > 0$, potom náhodná premenná

$$X = \sum_{i=1}^{n} k_i X_i$$

je *lineárnou formou* náhodných premenných X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Označme strednú hodnotu náhodnej premennej X_i ako μ_i, jej rozptyl σ_i^2 a kovarianciu náhodných premenných X_i, X_j ako σ_{ij}.

Stredná hodnota premennej X

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i \mu_i ;$$

a jej rozptyl

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_i k_j \sigma_{ij}$$

alebo pri použití korelačných koeficientov

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_i k_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Keď rozptyly náhodných premenných $X_1, X_2, ..., X_n$ sú rovnaké, t. j.

$$D(X_i) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

potom dostaneme

$$D(X) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} k_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_i k_j \sigma_{ij}$$

alebo

$$D(X) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_i k_j \rho_{ij} \right)$$

V prípade, že náhodné premenné $X_1, X_2, ..., X_n$ sú po dvoch nezávislé alebo aspoň nekorelované, zjednodušia sa vzorce na tvar

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2$$

Majme ďalej dve lineárne formy

$$X = \sum_{i=1}^{n} k_i X_i, \quad \sum_{i=1}^{n} k_i^2 > 0$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} l_i X_i, \quad \sum_{i=1}^{n} l_i^2 > 0$$

vyššie uvedených náhodných premenných $X_1, X_2, ..., X_n$. Ich kovariancia je

$$\sigma(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} k_i l_i \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_i l_j \sigma_{ij}$$

alebo v ekvivalentnom vyjadrení

$$\sigma(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} k_i l_i \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_i l_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Keď majú premenné $X_1, X_2, ..., X_n$ rovnaké rozptyly $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2 = \sigma^2$, kovariancia je

$$\sigma(X, Y) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} k_i l_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_i l_j \sigma_{ij}$$

alebo

$$\sigma(X, Y) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} k_i l_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_i l_j \rho_{ij} \right)$$

Pre nekorelované náhodné premenné $X_1, X_2, ..., X_n$ sa vzorce redukujú na tvar

$$\sigma(X, Y) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} k_i l_i$$

Z charakteristík jednej a dvoch lineárnych foriem ľahko odvodíme charakteristiky n rozmerného náhodného vektora $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)^{\mathrm{T}}$, ktorého prvky sú lineárnymi formami prvkov iného, n-rozmerného náhodného vektora $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)^{\mathrm{T}}$, t. j.

$$Y_1 = k_{11} X_1 + k_{12} X_2 + ... + k_{1n} X_n$$

$$Y_2 = k_{21} X_1 + k_{22} X_2 + ... + k_{2n} X_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_n = k_{n1} X_1 + k_{n2} X_2 + ... + k_{nn} X_n$$

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}^2 > 0, \ i = 1, 2, ..., n$$

Tento systém lineárnych foriem možno zapísať v maticovom tvare takto

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \text{ t. j. } \mathbf{Y} = \mathbf{AX}$$

Keď vektor $\mathbf{X}$ má vektor stredných hodnôt $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^{\mathrm{T}}$ a kovariančnú maticu $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}$, potom vektor $\mathbf{Y}$ má vektor stredných hodnôt

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$$

a kovariančnú maticu

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$