

Číselné charakteristiky – momenty

Náhodnú premennú sme mali doteraz jednoznačne danú hustotou rozdelenia pravdepodobnosti alebo distribučnou funkciou. Môžeme ju tiež charakterizovať určitými číselnými charakteristikami, v ktorých je zhustená informácia o jej dôležitých vlastnostiach ako sú *poloha, variabilita, šikmosť a špicatosť*.

Tieto parametre nazývame *momenty* alebo *číselné charakteristiky* náhodnej premennej X a sú závislé od distribučnej funkcie, resp, hustoty rozdelenia pravdepodobnosti.

Počiatočný moment

Počiatočný moment k -tého rádu ν_k je definovaný vzťahom:

$$\nu_k = E[(X)^k] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx & \text{ak } X \text{ je spojitá náhodná premenná s hustotou } f(x) \\ \sum_i x_i^k p(x_i) & \text{ak } X \text{ je diskrétna náhodná premenná s pravdepodobnostnou funkciou } p(x) \end{cases}$$

Centrálny moment

Centrálnym momentom k -tého rádu náhodnej premennej X rozumieme číslo μ_k definované vzťahom:

$$\mu_k = E[(X - \nu_1)^k] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} [x - \nu_1]^k f(x) dx & \text{ak } X \text{ je spojitá náhodná premenná s hustotou } f(x) \\ \sum_i [x_i - \nu_1]^k p(x_i) & \text{ak } X \text{ je diskrétna náhodná premenná s pravdepodobnostnou funkciou } p(x) \end{cases}$$

Pre momenty náhodnej premennej platia teda nasledujúce vzťahy:

1. $\mu_0 = \nu_0 = E(1) = 1$
2. $\nu_1 = E(X)$
3. $\mu_1 = 0$
4. $\mu_2 = D(X) = \nu_2 - \nu_1^2$

Koeficient šikmosti (asymetrie)

Koeficient šikmosti je najčastejšie používaná miera asymetrie rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X a je definovaný vzťahom:

$$\alpha_3(X) = \frac{\mu_3(X)}{[D(X)]^{3/2}}$$

s nasledujúcimi vlastnosťami:

- a) pre symetrické rozdelenie je $\alpha_3(X) = 0$
- b) pre rozdelenie pretiahnutéjšie smerom napravo ako naľavo je $\alpha_3(X) > 0$ a naopak
- c) koeficient šikmosti sa nemení pri lineárnej transformácii náhodnej premennej X
 $\alpha_3(aX + b) = \alpha_3(X) \quad a \neq 0.$

Koeficient špicatosti (excesu)

Koeficient špicatosti náhodnej premennej X (tiež plochosti) je definovaný vzťahom:

$$\alpha_4(X) = \frac{\mu_4(X)}{[D(X)]^2} - 3$$

Má tieto vlastnosti

- a) pre normálne rozdelenie je $\alpha_4 = 0$

- b) ak má premenná X napr. symetrické rozdelenie a ak $\alpha_4 > 0$ [$\alpha_4 < 0$], znamená to, že na svojich koncoch sú hodnoty pravdepodobnostnej funkcie alebo hustoty rozdelenia pravdepodobnosti väčšie (menšie), než hodnoty hustoty pravdepodobnosti normálneho rozdelenia (s rovnakou strednou hodnotou a s rovnakým rozptylom)
- c) koeficient špicatosti sa nemení pri lineárnej transformácii náhodnej premennej t.j.
- $$\alpha_4(aX + b) = \alpha_4(X) \quad a \neq 0$$

Charakteristiky polohy

Stredná hodnota $E(X)$

Počiatkový moment prvého rádu ν_1 náhodnej premennej X nazývame stredná hodnota a označujeme $E(X)$.

Stredná hodnota $E(X)$ (označujeme ju tiež μ alebo μ_X , keď chceme zdôrazniť, že ide o konkrétnu premennú) náhodnej premennej X , je najdôležitejšou charakteristikou polohy rozdelenia náhodnej premennej X (nazývaná tiež očakávaná hodnota alebo matematická nádej).

$E(X)$ hodnota, okolo ktorej môžeme očakávať najviac hodnôt uvažovanej náhodnej premennej X .

Pre diskretnú náhodnú premennú X s možnými hodnotami $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tejto premennej a ich pravdepodobnosťami $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ je stredná hodnota definovaná vzťahom

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i).$$

Pre spojitú náhodnú premennú X je stredná hodnota daná integrálom

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Vlastnosti strednej hodnoty

Nech X je ľubovoľná náhodná premenná a nech a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla. Potom stredná hodnota $E(X)$ má nasledujúce vlastnosti

1. $E(c) = c$
2. $E(cX) = c E(X)$
3. $E(aX + b) = a E(X) + b$
4. $E[(aX)^k] = a^k E(X^k)$

Kvantil

Kvantil x_p resp. p -kvantil ($p \cdot 100\%$ kvantil) náhodnej premennej X je taká hodnota tejto premennej, pre ktorú platí

$$P(X \leq x_p) = p, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

V prípade spojitej náhodnej premennej X , p -kvantil dostaneme ako hodnotu, v ktorej pre distribučnú funkciu platí

$$F(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f(x) dx = p.$$

Pre najdôležitejšie rozdelenia pravdepodobnosti sú kvantily tabelované v štatistických tabuľkách.

Medián

Medián M je taká hodnota náhodnej premennej X , od ktorej menšie aj väčšie hodnoty tejto premennej sú rovnako pravdepodobné, t.j.

$$P(X < M) = P(X > M) = 0,5.$$

Medián (čo je vlastne 0,5-kvantil $x_{0,5}$) teda rozdeľuje množinu (interval) možných hodnôt náhodnej premennej na dve rovnako pravdepodobné časti.

Z definície distribučnej funkcie vyplýva, že

$$P(X \leq x_{0,5}) = F(x_{0,5}) = F(M)$$

Pre spojitú náhodnú premennú X nájdeme medián M ako hodnotu , v ktorej platí

$$F(M) = \int_{-\infty}^M f(x) dx = 0,5.$$

Modus

Modus je najpravdepodobnejšia hodnota náhodnej premennej. V prípade spojitých náhodných premennej X funkcia hustoty $f(x)$ v ňom nadobúda lokálne maximum.

Ak existuje len jeden modus o rozdelení pravdepodobnosti hovoríme, že je *unimodálne*, ak sú dva *bimodálne*, ak ich je viac *multimodálne*.

Charakteristiky variability

Charakteristiky variability merajú premenlivosť (kolísanie) , variabilitu hodnôt náhodnej premennej X . Udávajú ako sú tieto hodnoty rozptýlené.

Rozptyl

Centrálny moment druhého rádu μ_2 náhodnej premennej X nazývame rozptyl a označujeme $D(X)$.

Rozptyl (disperzia, variancia) $D(X)$, $(\sigma^2(X))$ je základnou charakteristikou variability náhodnej premennej. Je definovaný vzťahom

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 = \sigma^2(X)$$

Pre výpočet rozptylu používame aj roz násobený tvar tohto vzorca t.j.

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Pre diskretnú náhodnú premennú ho vypočítame zo vzťahu

$$D(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p(x_i)$$

Pre spojitú náhodnú premennú X je definovaný vzťahom

$$D(X) = \sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

Rozptyl je stredná hodnota funkcie $h(x) = [X - E(X)]^2$. Uvádza sa v kvadráte jednotiek náhodnej premennej X , preto bolo potrebné definovať charakteristiku variability, ktorá má ten istý fyzikálny rozmer ako náhodná premenná:

Smerodajná odchýlka

Smerodajná odchýlka $\sigma(X)$ je kladná odmocnina z rozptylu t.j.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Ak chceme zdôrazniť, že je to smerodajná odchýlka náhodnej premennej X , môžeme ju označiť σ_X .

Variačný koeficient

Variačný koeficient v náhodnej premennej X je pomer smerodajnej odchýlky k strednej hodnote μ , t.j.

$$v = \frac{\sigma}{\mu}.$$

Variačné rozpätie

Pod variačným rozpätím náhodnej premennej X rozumieme rozdiel jej najväčšej a najmensej hodnoty a označujeme

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Vlastnosti rozptylu

Nech X je ľubovoľná náhodná premenná a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla, potom disperzia má nasledujúce vlastnosti:

1. $D(c) = 0$
2. $D(cX) = c^2 D(X)$
3. $D(bX \pm c) = b^2 D(X)$